Ontologien im Semantic Web WiSe 2019/20

Übungsblatt 3

Abgabe: 02.12.2019

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe die Namen aller Beteiligten.

Aufgabe 1 Endlichkeit (5 Punkte)

Sei Σ die leere Signatur.

a) Was sind Σ-Modelle?

b) Zeigen Sie mittels Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass $\mathcal{A} \cong_m \mathcal{B}$ für alle Σ-Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $|A|, |B| \geq m$.

c) Folgern Sie, dass die Klasse der Σ-Modelle mit höchstens m Elementen durch eine Formel von Quantorenrang m definierbar ist, aber durch keine Formel von echt kleinerem Quantorenrang.

d) Folgern Sie ferner, dass die Klasse der endlichen Σ-Modelle nicht FO-definierbar ist.

e) Geben Sie für letztere Aussage ein alternatives (sehr kurzes) Argument über Kompaktheit an.

Aufgabe 2 Definierbarkeit (5 Punkte)

Zeigen Sie folgende Abschlusseigenschaften für FO-definierbare Klassen.

a) Wenn $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ ist, dann ist auch $\mathcal{D} - \mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$.

b) Wenn $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ sind, so auch $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

c) Wenn $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}$ FO-definierbar in $\mathcal{E}$ ist, dann ist $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{E}$.

Zeigen Sie ferner mittels Aufgabe 1, dass FO-Definierbarkeit nicht *abgeschlossen unter Projektion* ist: Wir bezeichnen für eine Teilsignatur Σ_0 von Σ und ein Σ-Modell $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}$ den Σ_0-*Redukt* von $\mathfrak{A}$, also das Σ_0-Modell mit Grundbereich A, das alle Symbole in Σ_0 so interpretiert wie $\mathfrak{A}$. Wenn eine Klasse $\mathcal{C}$ FO-definierbar ist, ist die Klasse

$$\mathcal{C}|_{\Sigma_0} = \{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$$

i.a. nicht FO-definierbar.

Aufgabe 3 Reduktion (5 Punkte)

Liefern Sie den fehlenden Schritt im Beweis der FO-Undefinierbarkeit von Erreichbarkeit aus der Vorlesung, d.h. geben Sie eine Formel $\psi(x, y)$ über $\Sigma = \{\leq\}$ an, die zwei Elemente einer endlichen linearen Ordnung genau dann in Beziehung setzt, wenn (bei der gegebenen Anordnung!) genau ein Element zwischen ihnen liegt, wobei wir die Ordnung zu einem Ring schließen, in dem auf das größte Element wieder das kleinste folgt.

Aufgabe 4 Noch mal Endlichkeit (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse der linearen Ordnungen (mit Endpunkten) mit höchstens m Elementen in der Klasse *ORD* aus der VL mit einer Formel von Quantorenrang $\mathcal{O}(\log n)$ definierbar ist. Geben Sie eine exakte obere Schranke für den benötigten Quantorenrang an. Folgern Sie ferner aus Resultaten aus der VL eine logarithmische *untere* Schranke für den benötigten Quantorenrang.