

Übungsblatt 12

Abgabe der Lösungen: Mo 27.1–Do 30.1

Aufgabe 1 Die Natürlichen Zahlen als Modell, Fortsetzung

(Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut das Standardmodell der natürlichen Zahlen aus Übungsblatt 11, Aufgabe 1. und erinnern uns an die Peano-Axiome:

$$\text{PA}_1. \forall x (\neg(0 = s(x)));$$

$$\text{PA}_2. \forall x, y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y);$$

$$\text{PA}_3. \forall x (x + 0 = x);$$

$$\text{PA}_4. \forall x, y (x + s(y) = s(x + y));$$

$$\text{PA}_5. \forall x (x \times 0 = 0);$$

$$\text{PA}_6. \forall x, y (x \times s(y) = x \times y + x);$$

$$\text{PA}_7. \forall y_1, \dots, y_n (\phi(0, y_1, \dots, y_n) \wedge \forall x (\phi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \phi(s(x), y_1, \dots, y_n)) \\ \rightarrow \forall x \phi(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Beweisen Sie nun im Fitch-Kalkül, dass $\forall x, y (x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \wedge y = 0))$ aus den Axiomen PA_1 – PA_7 folgt.

Aufgabe 2 Modellbau für Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

Da alle Axiome der Peano-Arithmetik über \mathbb{N} gelten, ist die Peano-Arithmetik korrekt über natürlichen Zahlen; d.h. $\mathbb{N} \models \phi$ gilt für jedes Theorem ϕ der Peano-Arithmetik, d.h. für alle durch natürliches Schließen aus den Peano-Axiomen herleitbaren Formeln ϕ . Die Peano-Arithmetik ist dennoch *nicht* vollständig über \mathbb{N} ; d.h. es gibt Formeln, die über \mathbb{N} gültig, aber keine Theoreme der Peano-Arithmetik sind. Dies ist eine Konsequenz des berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und hat unter anderem zur Folge, dass es strukturell andere Modelle als \mathbb{N} gibt („strukturell anders“ in einem formal präzisen Sinn), die alle Peano-Axiome erfüllen. Solche Modelle werden auch *Nichtstandardmodelle* genannt. Man meint intuitiv, solche Modelle auf recht naive Weise konstruieren zu können, was aber fehlschlägt, wie die folgenden Versuche zeigen:

- Erweitern Sie das Modell \mathbb{N} auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, indem Sie die Semantik von Funktionssymbolen dahingehend vervollständigen, dass ∞ als Ergebnis ausgegeben wird, sobald mindestens ein Argument zu ∞ evaluiert wird.
- Beweisen Sie, dass das so definierte Modell kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist (es also ein Peano-Axiom ϕ gibt, so dass $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \not\models \phi$). **Hinweis:** Betrachten Sie das Induktionsaxiom für $\phi(x) = \neg(x = s(x))$.

Aufgabe 3 Peano-Arithmetik im Quadrat (10 Punkte)

Betrachten Sie analog zu Aufgabe 2 die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Paaren von natürlichen Zahlen (x, y) mit $x, y \in \mathbb{N}$ und die folgende elementweise definierte Semantik von 0 , s , $+$ und \times über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[0] &= (\mathbb{N}[0], \mathbb{N}[0]), \\(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[s](x, y) &= (\mathbb{N}[s](x), \mathbb{N}[s](y)), \\(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[+](x, y, (x', y')) &= (\mathbb{N}[+](x, x'), \mathbb{N}[+](y, y')), \\(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\times](x, y, (x', y')) &= (\mathbb{N}[\times](x, x'), \mathbb{N}[\times](y, y')).\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ebenfalls kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist, indem Sie zeigen, dass

- (a) $\forall x, y (x + y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$ aus PA_1 – PA_7 im Fitch-Kalkül folgt (**Hinweis:** es kann sich lohnen, eine im Fitch-Kalkül bewiesene Hilfsaussage in Anspruch zu nehmen);
- (b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models \forall x, y (x + y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$.

Aufgabe 4 Herbrandmodell (10 Punkte)

Sei nil eine prädikatenlogische Konstante, $cons$ ein binäres Funktionssymbol und $evenLength$ ein unäres Prädikatensymbol. Beschreiben Sie das kleinste Herbrand-Modell für die prädikatenlogische Theorie, die durch die folgenden zwei Axiome definiert ist:

$$\begin{aligned}&evenLength(nil) \\ \forall x, y, z (evenLength(z) \rightarrow evenLength(cons(x, cons(y, z)))\end{aligned}$$

Hierbei ist mit dem „kleinsten“ Herbrandmodell dasjenige mit der bezüglich Mengeninklusion kleinsten Interpretation des Prädikats $evenLength$ gemeint. Zeigen Sie, dass das von Ihnen angegebene Modell tatsächlich das in diesem Sinne kleinste ist.

Hinweis: Letztere Behauptung zeigt man durch Induktion über Grundterme (also Elemente des Herbrand-Universums).