Übungsblatt 9

Abgabe der Lösungen: Di 7.1–Do 9.1

Aufgabe 1 Das Trinkerparadoxon in Prädikatenlogik (Präsenzaufgabe)

Das sogenannte "Trinkerparadoxon" lautet: *"Es gibt jemanden in der Kneipe, so dass, wenn er trinkt, auch alle anderen trinken"*.

Diese Aussage lässt sich auf natürliche Weise in Logik erster Stufe formalisieren.

1. Wie?
2. Beweisen Sie die betreffende Formel in Fitch.
3. Beweisen Sie die betreffende Formel in Coq.

Achtung: Die betreffende Formel entspricht nicht den in der Vorlesung behandelten aristotelischen Formen. So etwas ist fast immer falsch oder zumindest nutzlos, außer eben für humoröse Zwecke wie dieses Paradox, das in der Tat gerade deswegen so paradox ist, weil es von den aristotelischen Formen abweicht.

Um Fitch-Beweise in Coq nachzubilden, können Sie die Regeln mittels folgender Tabelle (die die für Aussagenlogik bereits angegebene ergänzt) in Coq übertragen.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$\forall I$	`intro x0.`
$\forall E$	`apply H.`
$\exists I$	`exists t.`
$\exists E$	`destruct H.`

Aufgabe 2 Gruppentheorie als Theorie erster Stufe (Präsenzaufgabe)

Gruppentheorie ist die Theorie erster Stufe über den Operationen $e/0$, $i/1$, $*/2$, die mittels der folgenden Axiome definiert ist

- $\forall x\,(i(x) * x = e)$;
- $\forall x\,(e * x = x)$;
- $\forall x, y, z\,((x * y) * z = x * (y * z))$.

1. Beweisen Sie in Fitch, dass aus diesen Axiomen der folgende Satz folgt:

$$\forall x\ (x * i(x) = e).$$

Der Kürze halber dürfen Sie gleichzeitig mehrere Allquantoren in einem Schritt eliminieren bzw. einführen, z.B.

1	$\vdots$	
2	$\forall x(\forall y(\forall z((x * y) * z = x * (y * z))))$	
3	$\vdots$	
4	$\vdots$	
5	$(c * i(c)) * c = c * (i(c) * c)$	$\forall$E, 2
6	$\vdots$	

2. Formalisieren Sie ferner Ihren Beweis in Coq. Ergänzen Sie dazu die folgende Vorlage.

```
1  Require Import Classical.
2  Parameter D: Set.
3
4  Parameter m: D -> D -> D.
5  Parameter i: D -> D.
6  Parameter e: D.
7
8  Notation "A * B" := (m A B).
9
10 Axiom left_inverse: forall x:D, i x * x = e.             (*   gleich (m (i x) x) = e           *)
11 Axiom left_neutral: forall x:D, e * x = x.               (*   gleich (m e x) = x               *)
12 Axiom assoc: forall x y z:D, (x * y) * z = x * (y * z).  (*   gleich m (m x y) z = m x (m y z)  *)
13
14 Variables x y z: D.
15
16 Theorem right_inverse:  x * i x = e.
17
18    (* Ihren Beweis hier einfügen *)
19
20 Qed.
```

Dabei ist auf Folgendes zu achten.

(2.a) *Axiome* (Zeilen 9–10) kann man jederzeit mit der `pose proof` Taktik aufrufen, z.B. fügt
`pose proof left_neutral.`
das Axiom `left_neutral` zu den Prämissen hinzu.

(2.b) Die Fitch-Regel (=I) entspricht der Coq-Taktik `reflexivity`.

(2.c) Die Fitch-Regel (=E) entspricht den Coq-Taktiken `rewrite ->` und `rewrite <-`; z.B. ersetzt `rewrite -> H.` im aktuellen Beweisziel ein Vorkommen der linken Seite der Gleichung `H` durch die rechte (natürlich nur dann, wenn die Annahme `H` tatsächlich eine Gleichung ist); entsprechend ersetzt `rewrite <- H.` in der umgekehrten Richtung. Beide Taktiken führen vorab ggf. noch eine Substitution durch, sodass z.B. eine Gleichung $x + y = y + x$ auch verwendet werden kann, um $3 + x$ in $x + 3$ zu überführen.

(2.d) In Coq kann man Taktiken mit ∀-Elimination kombinieren, indem man zum Taktik-Aufruf `with (x1:= t1) ... (xn:= tn)` dazu schreibt, wobei `x1 ... xn` die allquantifizierten Variablen der verwendeten Aussage sind und `t1 ... tn` die Terme, mit denen diese Variablen ersetzt werden. Z.B. erzeugt `rewrite <- left_inverse with(x:= (i x))` die Instanz `i (i x) * (i x) = e` von `left_inverse` und verwendet dann diese Instanz, um das Ziel umzuformen.

Punkte (b.2) und (b.3) laufen insgesamt auf die folgende Vervollständigung der Fitch-Coq-Tabelle hinaus:

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$=I$	`reflexivity.`
$=E$	`rewrite H.`

Aufgabe 3 Ärzte und Quacksalber (5 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Aussagen und ihnen entsprechende prädikatenlogische Formeln erster Stufe:

1. "Es gibt einen Patienten, der alle Ärzte mag": $\exists x\ (\mathsf{P}(x) \wedge \forall y\ (\mathsf{D}(y) \rightarrow \mathsf{L}(x,y)))$
2. "Kein Patient mag Quacksalber": $\forall x\ (\mathsf{P}(x) \rightarrow \forall y\ (\mathsf{Q}(y) \rightarrow \neg\mathsf{L}(x,y)))$
3. "Kein Arzt ist Quacksalber": $\forall x\ (\mathsf{D}(x) \rightarrow \neg\mathsf{Q}(x))$

Machen Sie sich klar, welche intuitive Bedeutung die Prädikate $\mathsf{P}(x)$, $\mathsf{D}(x)$, $\mathsf{Q}(x)$ und $\mathsf{L}(x,y)$ hier jeweils haben und weshalb die Formeln die jeweiligen Aussagen korrekt formalisieren.

5 Punkte Leiten Sie sodann im Fitch-Kalkül die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. her.

Aufgabe 4 Eigenschaften binärer Relationen (7 Punkte)

Wir formalisieren einige bekannte Eigenschaften binärer Relationen prädikatenlogisch:

$$\begin{aligned}
\mathsf{reflexiv}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x\ (\mathsf{R}(x,x)) \\
\mathsf{transitiv}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y,z\ ((\mathsf{R}(x,y) \wedge \mathsf{R}(y,z)) \rightarrow \mathsf{R}(x,z)) \\
\mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y\ (\mathsf{R}(x,y) \rightarrow \mathsf{R}(y,x)) \\
\mathsf{euklidisch}(\mathsf{R}) &\equiv \forall x,y,z\ ((\mathsf{R}(x,y) \wedge \mathsf{R}(x,z)) \rightarrow \mathsf{R}(y,z))
\end{aligned}$$

Eine binäre Relation R ist also beispielsweise genau dann transitiv, wenn wir für alle aufeinanderfolgenden Transitionen $\mathsf{R}(x,y)$ und $\mathsf{R}(y,z)$ stets auch die Transition $\mathsf{R}(x,z)$ haben.

1. Beweisen Sie die folgenden Formeln im Fitch-Kalkül *oder* in Coq:

3 Punkte (a) $(\mathsf{reflexiv}(\mathsf{R}) \wedge \mathsf{euklidisch}(\mathsf{R})) \rightarrow \mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R})$

3 Punkte (b) $(\mathsf{symmetrisch}(\mathsf{R}) \wedge \mathsf{euklidisch}(\mathsf{R})) \rightarrow \mathsf{transitiv}(\mathsf{R})$

1 Punkt 2. Beweisen Sie sodann, dass eine Relation R eine Äquivalenzrelation ist, wenn R reflexiv und euklidisch ist (eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation.).

Aufgabe 5 Weitere Tatsachen aus der Gruppentheorie (8 Punkte)

Formalisieren Sie und beweisen Sie die folgende Tatsachen, die aus den Axiomen der Gruppentheorie aus Aufgabe 2 folgt:

- Für alle x gilt: $x * e = x$. *3 Punkte*
- Für alle x und y gilt: $i(x * y) = i(y) * i(x)$. *5 Punkte*

Führen Sie den Beweis in Coq!

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 2.