

Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen: Mo 9.12–Do 12.12

Aufgabe 1 Verbesserte Resolution I (Präsenzaufgabe)

Sei A ein Atom und φ eine Menge von Klauseln. Seien φ/A und $\varphi/\neg A$ die in der Vorlesung definierten Klauselmengen

$$\begin{aligned}\varphi/A &= \{C \setminus \{\neg A\} \mid A \notin C, C \in \varphi\} \\ \varphi/\neg A &= \{C \setminus \{A\} \mid \neg A \notin C, C \in \varphi\}.\end{aligned}$$

1. *Pure Literal Elimination (PLE)*: Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf φ dieselbe Antwort liefert wie für φ/A ($\varphi/\neg A$), wenn $\neg A \notin C$ ($A \notin C$) für alle $C \in \varphi$.
2. *Unit Propagation (UP)*: Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf φ dieselbe Antwort liefert wie für φ/A ($\varphi/\neg A$), wenn $\{A\} \in \varphi$ ($\{\neg A\} \in \varphi$).

Zeigen Sie erneut die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

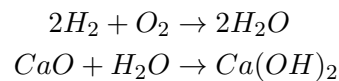
$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\},$$

unter Verwendung der obigen Prinzipien.



Aufgabe 2 Reaktion durch Resolu-tion (Präsenzaufgabe)

Wir nehmen an, dass die folgenden chemischen Reaktionen möglich sind



und ein ausreichender Vorrat von H_2 (*Wasserstoff*) und CaO (*ungelöschter Kalk*) zu Verfügung steht. Formalisieren und beweisen Sie mittels Resolution folgende Aussagen:

- (a) Wenn zusätzlich O_2 (*Sauerstoff*) zur Verfügung steht, kann man $Ca(OH)_2$ (*gelöschter Kalk*) synthetisieren.
- (b) Andernfalls kann man $Ca(OH)_2$ *nicht* synthetisieren.

Hinweis: Betrachten Sie chemische Verbindungen wie CaO und O_2 usw. als aussagenlogische Atome, $+$ als Konjunktion und den *Reaktionspfeil* \rightarrow als Implikation. Sie dürfen die Ergebnisse

von Aufgabe 1 verwenden.

Aufgabe 3 Verbesserte Resolution bei der Arbeit (4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden als Klauselmengen geschriebenen CNFs konsistent sind. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von Aufgabe 1.

(a) $\{P, Q\}, \{Q, R\}, \{R, W\}, \{\neg R, \neg P\}, \{\neg W, \neg Q\}, \{\neg Q, \neg R\}$.

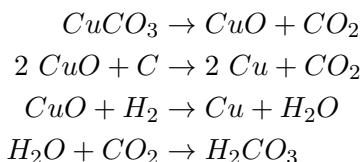
2 Punkte

(b) $\{P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, W\}, \{R, P\}, \{\neg W, \neg Q\}, \{Q, \neg R\}$.

2 Punkte

Aufgabe 4 Reaktion durch Resolution (6 Punkte)

Analog zu Aufgabe 2, nehmen wir an, dass die folgenden chemischen Reaktionen möglich sind



und ein Vorrat von H_2 und C zu Verfügung steht. Formalisieren Sie und beweisen Sie mittels Resolution folgende Aussagen:

(a) Wenn zusätzlich CuCO_3 zur Verfügung steht, kann man H_2CO_3 synthetisieren.

3 Punkte

(b) Andernfalls kann man H_2CO_3 nicht synthetisieren.

3 Punkte

Aufgabe 5 Verbesserte Resolution II (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Resolutionsverfahren, wie es in der Vorlesung eingeführt wurde, zur effizienteren Implementierung dahingehend geändert werden kann, dass am Anfang jede Klausel der gegebenen CNF, die eine andere Klausel der CNF als Teilmenge enthält, entfernt wird. So kann man beispielsweise $\{\{\neg A, B, C\}, \{B\}, \{B, \neg C\}, \{A, C\}\}$ zu $\{\{B\}, \{A, C\}\}$ komprimieren.

7 Punkte

Genauer gesagt ist zu beweisen, dass das neue Verfahren immer die gleiche Antwort liefert wie das ursprüngliche. **Achtung:** Die Semantik von Formeln und die Vollständigkeit des Resolutionsverfahrens sollen nicht verwendet werden.

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion über die zur Herleitung einer bestimmten Klausel benötigten Anzahl Schritte im Resolutionsverfahren. Beweisen Sie damit, dass es für jede Klausel C , die mittels Resolution in n Schritten aus der ursprünglichen Klauselmengen abgeleitet werden kann, ein entsprechendes C' gibt, so dass $C' \subseteq C$ und C' aus der komprimierten Klauselmengen mittels Resolution ableitbar ist. Zeigen Sie, dass mit dieser Aussage folgt, dass der modifizierte Algorithmus „nicht erfüllbar“ antwortet, wenn der ursprüngliche Algorithmus dies tut. Die umgekehrte Implikation ist trivial — warum?

Verwenden Sie die Verbesserte Resolution I und II zu überprüfen, ob die folgende Klauselmengen konsistent ist:

3 Punkte

$$\{P, Q, R, W, S\}, \{Q, R, \neg Q, \neg W\}, \{R, W, Q\}, \{\neg R, \neg P, \neg W, \neg S\}, \{\neg W, \neg Q\}, \{\neg Q, \neg R, W, \neg S\}.$$