Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2019

Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen: Mo 25.11–Do 28.11

Aufgabe 1 Beweis durch Fallunterscheidung (Präsenzaufgabe)

Beweis durch Fallunterscheidung ist eine Beweisstrategie, die man wie folgt beschreiben kann: Um einen Satz ϕ zu beweisen, reicht es aus, ein ψ zu finden, so dass sowohl ψ als auch $\neg\psi$ (jeweils für sich genommen natürlich) ϕ implizieren.

1. Zeigen Sie, dass der Beweis durch Fallunterscheidung ein gültiges Prinzip des Fitch-Kalküls ist. Führen Sie zu diesem Zweck eine neue Fitch-Regel ein, die den Beweis durch Fallunterscheidung implementiert, und zeigen Sie, dass diese im Fitch-Kalkül herleitbar ist.

2. Implementieren Sie das Fallunterscheidungsprinzip in Coq. Vervollständigen Sie hierzu den folgenden Coq-Beweis:

```
Require Import Classical_Prop.            (* liefert u.a. NNPP, d.h. ˜ E *)

Section Fallunterscheidung.               (* Anfang des Namensraums *)
Variables x y: Prop.                      (* Lokale Variablen *)
Lemma FU : ((x -> y) /\ (˜x -> y)) -> y.
Proof.
                                          (* Beweis hier einfügen *)
Qed.
End Fallunterscheidung.                   (* Ende des Namensraums *)
```

3. Beweisen Sie mithilfe des Fallunterscheidungsprinzips
   (a) das *Gödel-Dummett-Axiom* $(A \to B) \vee (B \to A)$.
   (b) *Peirce's law* $((A \to B) \to A) \to A$;
   (c) *Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten*: $A \vee \neg A$.

Aufgabe 2 Herleitungen in Coq (9 Punkte)

Beweisen Sie die folgende logische folgerungen in Coq:

3 Punkte 1. $(\phi \to \psi) \vee \phi \vdash (\psi \to \phi) \vee \psi$;

3 Punkte 2. $\neg\phi \vdash (\xi \wedge \neg\psi) \vee ((\xi \wedge \neg\phi) \to \psi)$;

3 Punkte 3. $\phi \wedge (\phi \to (\psi \to \neg\phi)) \vdash \neg(\phi \to \psi)$.

Dabei dürfen Sie ausschließlich die Taktiken `intro`, `apply`, `exact`, `assumption`, `split`, `left`, `right`, `contradiction`, `destruct` und `assert` benutzen. Zusätzlich dürfen Sie – jedoch höchstens **insgesammt zweinmal** – das in Aufgabe 1 bewiesene Lemma verwenden. Dieses lässt sich wie folgt aufrufen:

$$\texttt{apply FU with (x:=}\psi\texttt{).}$$

(wobei ψ eine geeignete aussagenlogische Formel ist); dadurch wird das aktuelle Ziel ϕ mit der Konjunktion $(\psi \to \phi) \wedge (\neg\psi \to \phi)$ ersetzt.

Aufgabe 3 Elefantengedächtnis (4 Punkte)

Wir erinnern uns an die fünf Annahmen aus Aufgabe 3, Übungsblatt 2:

- Elefanten vergessen nie.
- Kein Geschöpf, das jemals *Mastermind* gewonnen hat, hatte einen Rüssel.
- Ein Geschöpf, das nichts vergisst, wird *Mastermind* stets gewinnen, vorausgesetzt, es nimmt am Turnier teil.
- Ein Geschöpf ohne Rüssel ist kein Elefant.
- Im Jahr 2001 nahm ein Elefant am *Mastermind*-Turnier teil.

Beweisen Sie, dass die fünf Annahmen zusammengenommen unerfüllbar sind. Führen Sie Ihren Beweis nach Ihrer Wahl in Fitch oder in Coq. Ihren eventuellen Coq-Beweis soll dabei wieder nur die in Aufgabe 2 angegeben Taktiken verwenden.

Hinweis: Um die Widersprüchlichkeit der fünf Annahmen A_1 bis A_5 zu zeigen, genügt es, die Formel

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \to \bot$$

in Coq zu beweisen; die Formel $\bot$ lässt sich in Coq als `False` kodieren.

Aufgabe 4 Negationsnormalform (7 Punkte)

1. In dieser Aufgabe betrachten wir Formeln, die aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind. Eine solche Formel ψ ist genau dann in *Negationsnormalform* (NNF), wenn alle Negationen in ihr direkt vor Atomen stehen. Wir definieren nun die folgende rekursive Berechnungsvorschrift:

$$\mathsf{NNF}(\psi) = \psi \qquad \text{(wenn } \psi \text{ ein Atom ist, oder } \psi = \top\text{, oder } \psi = \bot\text{)}$$

$$\mathsf{NNF}(\neg\psi) = \begin{cases} \top & \text{wenn } \psi = \bot \\ \bot & \text{wenn } \psi = \top \\ \mathsf{NNF}(\phi) & \text{wenn } \psi = \neg\phi \\ \mathsf{NNF}(\neg\phi) \vee \mathsf{NNF}(\neg\chi) & \text{wenn } \psi = \phi \wedge \chi \\ \mathsf{NNF}(\neg\phi) \wedge \mathsf{NNF}(\neg\chi) & \text{wenn } \psi = \phi \vee \chi \end{cases}$$

$$\mathsf{NNF}(\psi \wedge \phi) = \mathsf{NNF}(\psi) \wedge \mathsf{NNF}(\phi)$$

$$\mathsf{NNF}(\psi \vee \phi) = \mathsf{NNF}(\psi) \vee \mathsf{NNF}(\phi)$$

Beweisen Sie, dass für jede Formel ψ die Formel $\mathsf{NNF}(\psi)$ eine Negationsnormalform von ψ ist, d.h., dass $\mathsf{NNF}(\psi)$ in Negationsnormalform ist und dass $\mathsf{NNF}(\psi) \equiv \psi$.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über Formeln. Achten Sie darauf, dass z.B. $\neg\phi$ nicht strukturell kleiner als $\neg(\phi \wedge \chi)$ ist. Deshalb, um Induktion zu führen, müssen Sie die obige Definition zunächst umformulieren, indem die eine Hilfsfunktion NNF' einführen mit der Eigenschaft, dass $\mathsf{NNF}(\neg\phi) = \mathsf{NNF}'(\phi)$. Die Funktionen NNF und NNF' in der neuen Definition müssen einander gegenseitig rekursive anrufen.

2. Berechnen Sie $\mathsf{NNF}(\neg((A \vee B) \wedge \neg\neg(A \vee \neg C)))$. Geben Sie die Zwischenschritte an.

Bonusaufgabe: Maximal konsistente Mengen (+3 Punkte)

Wie Sie sich aus der Vorlesung erinnern, ist der zentrale Schritt im Beweis der Vollständigkeit des natürlichen Schließens der Beweis des Lindenbaumlemmas, d.h. der Tatsache, dass jede konsistente Menge zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden kann.

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Atome, und sei Φ die Formelmenge $\{A_i \leftrightarrow A_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(a) Beweisen Sie, dass Φ konsistent ist. Nutzen Sie dafür den Korrektheitsatz aus der Vorlesung.

(b) Beweisen Sie, dass es genau **zwei** maximal konsistente Mengen gibt, die Φ erweitern.

Hinweis: Sie dürfen die Resultate der Vorlesung verwenden.