

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: Mo 18.11–Do 21.11

Aufgabe 1 Beweise in Fitch

(Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende aussagenlogischen Formeln durch natürliches Schliessen (d.h. im Fitch-Kalkül):

- (a) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- (b) $(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
- (c) $(A \wedge (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (A \wedge \neg B)$.

Was lässt sich – nachdem die Formeln bewiesen sind – über die Erfüllbarkeit und die Allgemeingültigkeit der einzelnen Formeln sagen?

Aufgabe 2 Beweise in Coq

(Präsenzaufgabe)

Coq ist ein halbautomatischer Beweiser [1], der unter anderem verwendet werden kann, um aussagenlogische Formeln zu beweisen. Die Beweise können dabei in gleicher Weise organisiert werden wie Fitch-Beweise. Als Beispiel betrachten wir den folgenden Beweis der allgemeingültigen Formel $(q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$.

```

1 Require Import Classical_Prop.      (** Lemmas für klassische Logik **)
2
3 Parameters p q : Prop.            (** Deklaration aussagenlogischer
4                                     Variablen p und q **)
5 Theorem T1 : (q->p)->(~p->~q).      (** T1 ist der Name des Theorems **)
6 Proof.                             (** Anfang des Beweises **)
7 intro A.                             (** -> I **)
8 intro B.                             (** -> I **)
9 intro C.                             (** ~ I **)
10 assert p as D.
11 apply A; exact C.                   (** -> E **)
12 apply B; exact D.                   (** False I **)
13 Qed.                               (** Ende des Beweises **)

```

Hier werden die Namen *A*, *B* und *C* als Bezeichnungen für die Zwischenschritte verwendet; *intro*, *apply*, *assert* und *exact* sind sogenannte *Taktiken*, die sich, grob gesagt, ähnlich wie die Regeln des Fitch-Kalküls auswirken.

- Lesen Sie das Coq-Cheat-Sheet von Andrej Bauer [2], und vergegenwärtigen Sie sich anhand des Kapitels “Basic Tactics”, welche *Einführungs-* bzw. *Eliminations-*Regeln des Fitch-Kalküls jeweils welchen Coq-Taktiken (bzw. einfachen Kombinationen von Taktiken) entsprechen.

- Formalisieren Sie die Beweise aus Aufgabe 1 in Coq.

Hinweis: Die folgende Tabelle kann dabei helfen, zu einer Fitch-Regel jeweils die entsprechende Taktik zu finden.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
\wedge I	<code>split.</code>
\wedge E ₁	<code>destruct H as [H0 _]; exact H0.</code>
\wedge E ₂	<code>destruct H as [_ H0]; exact H0.</code>
\vee I ₁	<code>left.</code>
\vee I ₂	<code>right.</code>
\vee E	<code>destruct H as [L R]; apply H0; exact L; apply H1; exact R.</code>
\rightarrow I	<code>intro.</code>
\rightarrow E	<code>apply H; exact H0.</code>
\neg I	<code>intro.</code>
\neg E	<code>apply NNPP.</code>
\perp I	<code>apply H.</code>
\perp E	<code>contradiction.</code>

Ferner ist es gelegentlich hilfreich, während eines Beweises von Hand benannte Unterziele einzuführen, die man, wenn sie bewiesen sind, als zusätzliche Annahmen verwenden darf. Dies geschieht mittels `assert (<Formel>) as <Name>`.

Aufgabe 3 Kirsch-Bananen-Kalkül (6 Punkte)

Wir definieren den Kirsch-Bananen-Kalkül wie folgt durch die Regeln (i) bis (iv):

$$\frac{X}{\text{🍌}X} \quad \text{(i)} \qquad \frac{}{\text{🍌}} \quad \text{(ii)} \qquad \frac{X \text{🍌} \quad \text{🍌}Y}{XY} \quad \text{(iii)} \qquad \frac{X}{\text{🍌}X \text{🍌}} \quad \text{(iv)}$$

Dabei sind X und Y **nichtleere** Zeichenketten, die aus 🍌 und 🍌 bestehen.

(a) Beweisen Sie, dass jede Zeichenkette der Form $\text{🍌} \text{🍌} \dots \text{🍌} \text{🍌}$ mit geraden Anzahl von Kirschen im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar ist. **Hinweis:** Induktion. 3 Punkte

(b) Beweisen Sie, dass die Zeichenkette $\text{🍌} \text{🍌} \text{🍌}$ im Kirsch-Bananen-Kalkül **nicht** herleitbar ist. **Hinweis:** Beweisen Sie notwendigerweise separat, dass andere Zeichenketten auch nicht herleitbar sind. 2 Punkte

(c) Überprüfen Sie, ob die Regel 1 Punkt

$$\frac{X \quad Y}{XY}$$

im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar sind. **Achtung:** „Überprüfen“ heißt, dass Sie im positiven Fall eine Herleitung explizit angeben und im negativen Fall zeigen, dass keine Herleitung existiert.

Aufgabe 4 Fitch mit Disjunktion

(4 Punkte)

Disjunktion ist bekanntermaßen durch Konjunktion und Negation definiert. Formeln, die Disjunktionen enthalten, kann man dementsprechend in zwei Schritten beweisen: zunächst \vee durch \wedge und \neg ersetzen, danach den Fitch-Kalkül verwenden. In der Vorlesung wurden ohne Herleitung Disjunktionsregeln eingeführt. Zunächst betrachten wir die Introduktionsregeln:

$$\frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I_1)$$

$$\frac{B}{A \vee B} \quad (\vee I_2)$$

Sie lassen sich wie folgt im Fitch-Kalkül herleiten:

1	A		1	B	
2		$\neg A \wedge \neg B$	2		$\neg A \wedge \neg B$
3		$\neg A$	3		$\neg B$
		$\wedge E_1, 2$			$\wedge E_2, 2$
4		\perp	4		\perp
		$\perp I, 1, 3$			$\perp I, 1, 3$
5	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg I, 2-4$	5	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg I, 2-4$

Nun betrachten wir die Disjunktions-Eliminationsregel genauer:

$$\frac{\frac{A}{\vdots} \quad \frac{B}{\vdots}}{C} \quad A \vee B \quad (\vee E)$$

Leiten Sie diese Regel im Fitch-Kalkül her.

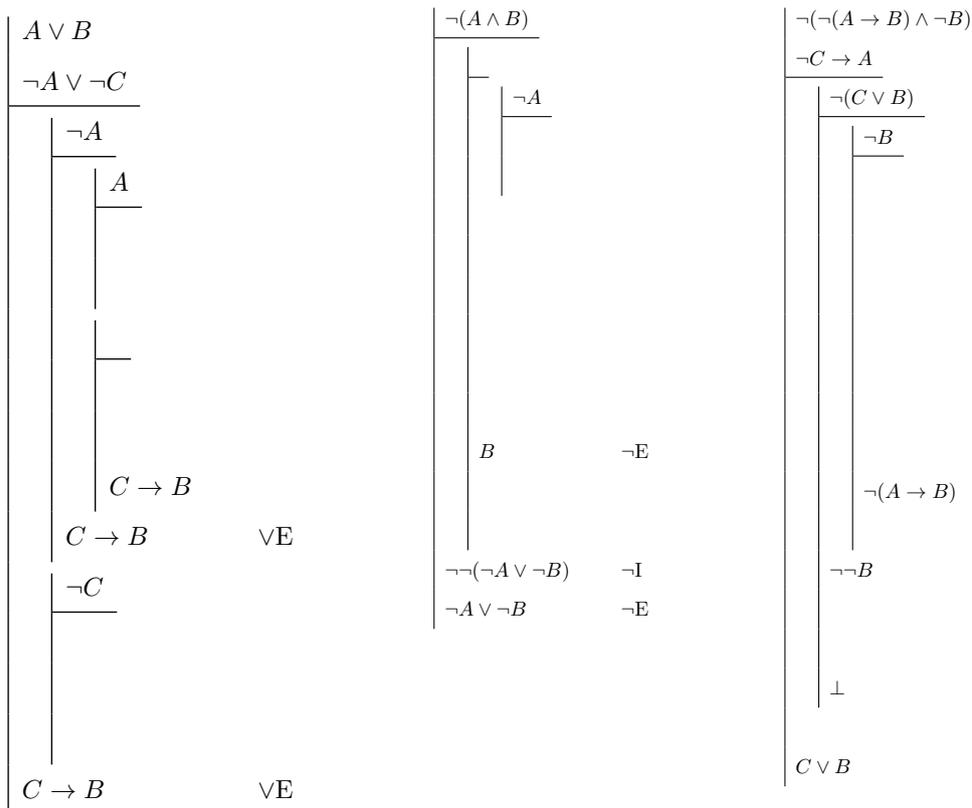
Hinweis: Führen Sie den Beweis, indem Sie in einem Teilbeweis $\neg C$ annehmen und per Beweis durch Widerspruch $\neg\neg C$ herleiten.

Aufgabe 5 Lückenhafte Beweislage

(6 Punkte)

jeweils
2 Punkte

Vervollständigen Sie die folgenden Fitch-Beweise, indem Sie die fehlenden Formeln sowie die dazugehörigen Regelanwendungen angeben.



a)

b)

c)

Achtung! Annotieren Sie Ihre Beweise zeilenweise mit der jeweils angewendeten Regelinstanz wie in der Vorlesung.

Aufgabe 6 Logische Schlussfolgerungen im Fitch (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Paare von Formeln:

(a) $(\phi \vee \psi) \rightarrow \xi$ und $(\neg\xi \rightarrow \psi) \vee (\neg\xi \rightarrow \neg\phi)$;

2 Punkte

(b) $\phi \wedge (\psi \rightarrow \neg\phi)$ und $\neg(\phi \rightarrow \psi)$.

2 Punkte

Für jedes Paar folgt mindestens eine der Formeln aus der jeweils anderen (wenn die Formeln äquivalent sind, folgt sogar sowohl die zweite Formel aus der ersten als auch die erste Formel aus der zweiten).

Beweisen Sie pro Paar mindestens eine solche logische Folgerung im Fitch-Kalkül indem Sie eine Formel des jeweiligen Paares als Prämisse verwenden und daraus die andere Formel herleiten.

Links

[1] *The Coq Proof Assistant*, <https://coq.inria.fr/>.

[2] *Andrej Bauer, Coq cheat sheet*, <http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/tspl/cheatsheet.pdf>.