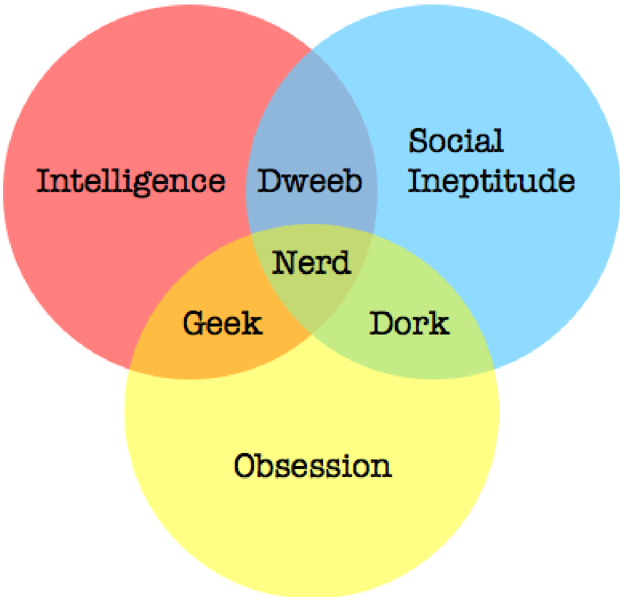
Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen: Mo 4.11–Do 7.11

Aufgabe 1 Mengendiagramme (Präsenzaufgabe)

Mengendiagramme bieten einen graphischen Weg, Wahrheitsbelegungen zu definieren:



Ein Punkt im Diagramm definiert eine Wahrheitsbelegung κ wie folgt: $\kappa(A) = \top$, wenn der Punkt zu dem mit A gekennzeichneten Bereich gehört, und andernfalls $\kappa(A) = \bot$.

Achtung: Die Beschriftungen sind wie folgt zu lesen: Die Beschriftungen der Kreise gehören zu den gesamten Kreisen, auch zu den Bereichen, die sich mit anderen Kreisen überschneiden. Alle weiteren Beschriftungen gehören nur zu den Bereichen, in denen sie stehen. Beispielsweise gehört ein Punkt im Bereich "Dweeb" auch zum Bereich "Intelligence", nicht aber zum Bereich "Nerd".

Seien I, SI, O, Dw, Do, G, N aussagenlogische Atome, die dem jeweiligen Bereich des gegebenen Diagramms entsprechen.

1. Gelten die folgenden Formeln unter allen Wahrheitsbelegungen κ, die sich gemäß der gerade gegebenen Definition im obigen Diagramm wiederfinden?

   (a) $Dw \vee G \vee Do$;

   (b) $(G \vee SI) \to (\neg O \wedge Dw)$;

   (c) $I \to ((Dw \wedge G) \vee \neg Do)$.

2. Welche dieser Formeln sind *gültig*?

3. Finden Sie für jede der folgenden Formeln eine Wahrheitsbelegung κ, die die jeweilige Formel erfüllt, und eine Wahrheitsbelegung κ, die sie nicht erfüllt. In beiden Fällen muss κ im obigen Diagramm vorkommen.

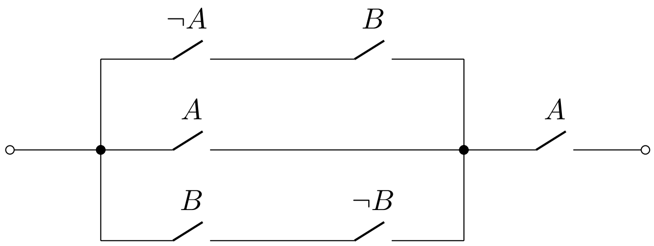
   (a) $(G \vee Dw) \to Do$;
   (b) $I \vee SI \vee O$;
   (c) $(I \wedge O) \vee (\neg Do \wedge Dw) \vee (\neg Dw \wedge Do)$.

Aufgabe 2 Schaltkreise und Induktion (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten Schaltkreise, die aus mit Kabeln verbundenen Schaltern bestehen. Jeder Schalter ist dabei entweder mit einem Buchstaben (z.B. A) oder mit einem negierten Buchstaben (z.B. $\neg A$) markiert. Wir nennen die mit A (bzw. ¬ A) markierten Schalter *A-Schalter*.

Die Markierung soll im folgenden Sinne als eine physikalische Beziehung verstanden werden: Schalter, die mit demselben Buchstaben gekennzeichnet sind, befinden sich immer in gleicher Position, d.h. sind entweder alle eingeschaltet oder alle ausschaltet; Schalter, die mit einem negierten Buchstaben gekennzeichnet sind, befinden sich immer in der entgegengesetzten Position zu den Schaltern, die mit dem entsprechenden Buchstaben ohne Negationssymbol markiert sind.

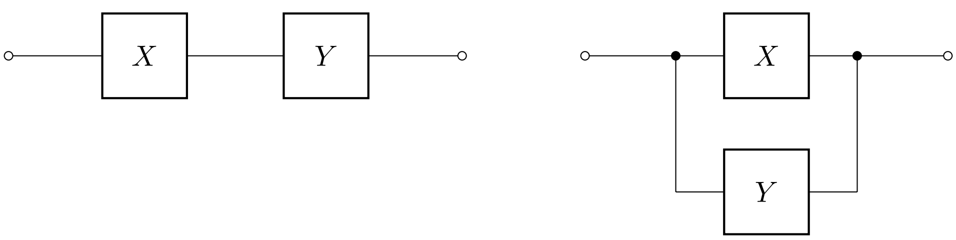
Die Frage, wann zwischen zwei gegebenen Punkten in einem solchen Schaltkreis Strom fließt, kann als eine aussagenlogische Formel ausgedrückt werden. Beispielsweise entspricht der Schaltkreis



der Formel $((\neg A \wedge B) \vee A \vee (B \wedge \neg B)) \wedge A$.

Wir behaupten ohne Beweis, dass jeder solche Schaltkreis (modulo Verkürzung oder Verlängerung von Anschlußkabeln) auf die folgende Weise induktiv konstruiert werden kann:

- Ein Schalter ist ein Schaltkreis; ein Kabelabschnitt sowie ein durchtrennter Kabelabschnitt sind jeweils ein Schaltkreis.
- Seien X und Y Schaltkreise; dann sind die *sequentielle* und die *parallele* Komposition von X und Y, definiert durch die Schaltdiagramme



(∗)

ebenfalls Schaltkreise.

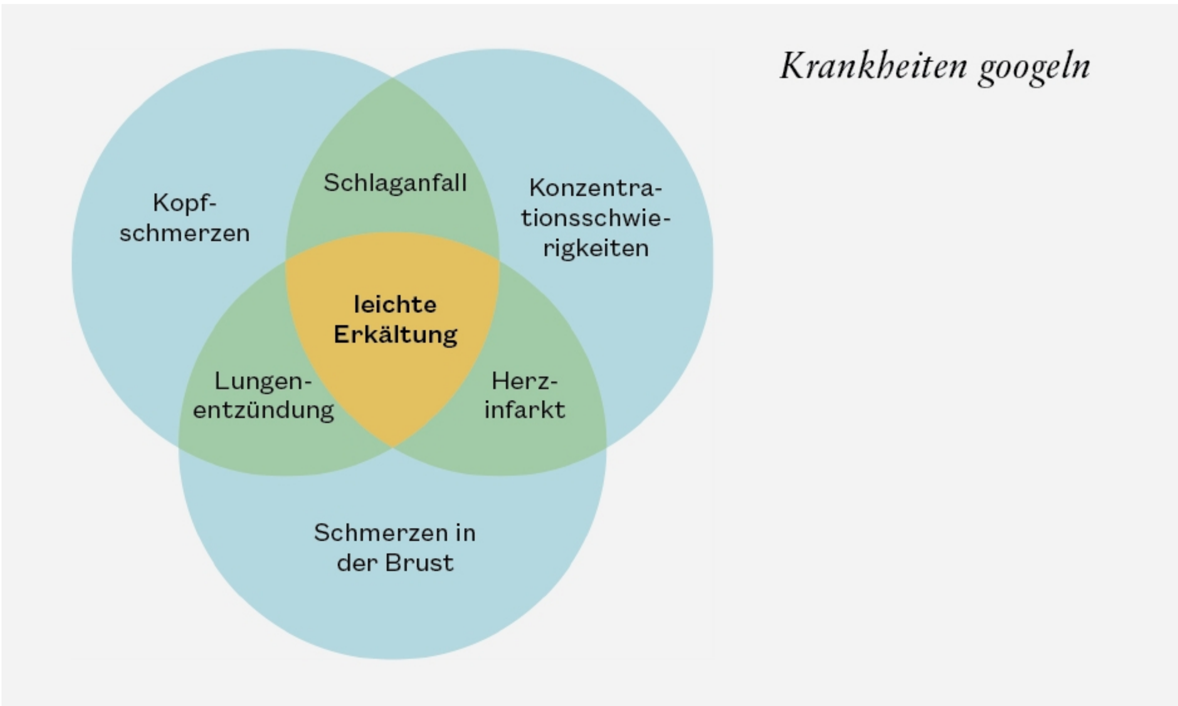
Damit erhält man folgendes Induktionsprinzip:

Induktionsprinzip für Schaltkreise: Eine Eigenschaft P gilt dann für alle Schaltkreise, wenn sie für alle einzelnen Schalter, alle Kabelabschnitte und alle durchtrennten Kabelabschnitte gilt (Induktionsanfang) und, wenn sie für Schaltkreise X und Y gilt, dann stets auch für die beiden Schaltkreise in Diagramm $(*)$ gilt (Induktionsschritt).

Geben Sie ein Verfahren an, das aus einem Schaltkreis X einen Schaltkreis X' konstruiert, so dass genau dann Strom durch X fließt, wenn kein Strom durch X' fließt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion mittels des obigen Induktionsprinzips.

Aufgabe 3 Krankheiten Googeln (5 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Mengendiagramm:



Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben, wobei wir das Diagramm – wie in Aufgabe 1 – derart interpretieren, dass die Schnittmengen der mit "Schlaganfall", "Herzinfarkt" bzw. "Lungenentzündung" bezeichneten Mengen mit der Menge "leichte Erkältung" allesamt jeweils die *leere Menge* sind (d.h., die leichte Erkältung ist weder Schlaganfall, noch der Herzinfarkt, noch die Lungenentzündung).

(a) Führen Sie aussagenlogische Variablen für die jeweiligen Bereiche des Diagramms ein und formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

1 Punkt (a. 1) Kopfschmerzen, die nicht mit Lungenentzündung verbunden sind, bedeuten entweder einen Schlaganfall oder eine leichter Erkältung (aber nicht beides!)

1 Punkt (a. 2) Bei Schmerzen in der Brust kann man nicht gleichzeitig Kopfschmerzen und Konzentrationsschwierigkeiten dazu haben;

(a. 3) Kopfschmerzen ohne Lungenentzündung können nur Schlaganfall oder leichte Erkältung bedeuten. *Punkt*

(b) Finden Sie für jede dieser Formeln eine Wahrheitsbelegung κ, die einem Punkt im Diagramm entspricht und die Formel erfüllt (falls solch eine Wahrheitsbelegung existiert). *1 Punkt*

(c) Finden Sie für jede dieser Formeln eine Wahrheitsbelegung κ, die einem Punkt im Diagramm entspricht und die Formel nicht erfüllt (falls solch eine Wahrheitsbelegung existiert). *1 Punkt*

Aufgabe 4 Subjektive Aussagen (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie BNF mit nur einem nichtterminalem Symbol kennengelernt. Wir heben den Begriff nun auf die übliche Allgemeinheitsebene an: es gibt beliebig viele (im unten zu behandelnden Beispiel drei) nichtterminale Symbole N, und für jedes hat man eine definierende Zeile der Form

$$N ::= B_1 \mid \cdots \mid B_n$$

mit $B_1, \ldots, B_n \in (N \cup T)^*$, wobei wieder N die Menge der nichtterminalen und T die Menge der terminalen Symbole ist. Völlig analog zur Situation mit nur einem nichtterminalen Symbol ist eine solche Zeile dahingehend zu verstehen, dass man in einem gegebenen String über $N \cup T$ jedes Vorkommen von n durch eines der B_i ersetzen darf; die Instanzen von n sind dann die Strings über T, die sich durch endlich viele Ersetzungen dieser Art aus n herleiten lassen.

Man betrachte die folgende Erweiterung der Grammatik der Aussagenlogik in BNF:

$$\begin{aligned}\phi &::= \mathrm{I}\ \psi \\ \psi &::= \heartsuit\sigma \mid \heartsuit\sigma\ \&\ \psi \\ \sigma &::= \mathrm{NY} \mid \mathrm{ME} \mid \text{those who } \psi\end{aligned}$$

Sind die folgenden Ausdrücke Instanzen von ϕ?

(a) I ♡ NY & NY ♡ ME. *1 Punkt*

(b) ♡ ME & ♡ ME. *1 Punkt*

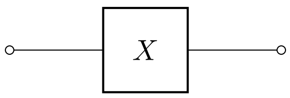
(c) I ♡ those who ♡ ME & those who I ♡. *1 Punkt*

Begründen Sie Ihre Antworten.

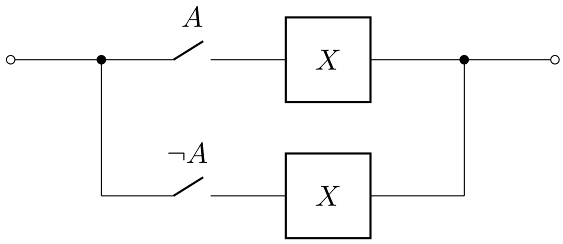
Aufgabe 5 Schaltkreise und Logik (12 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Schaltkreise aus Aufgabe 2. Zwei solche Schaltkreise betrachten wir als äquivalent, wenn bei gleicher Stellung aller Schalter entweder in beiden Schaltkreisen oder in keinem der beiden Schaltkreise Strom fließt.

(a) Begründen Sie, dass für jeden Schaltkreis X und jeden Buchstaben A die Schaltkreise *1 Punkt*

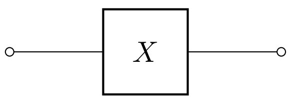


und

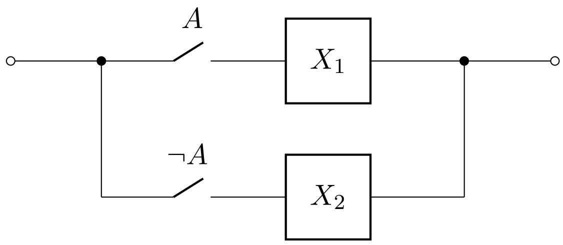


äquivalent sind.

5 Punkte (b) Verwenden Sie das Induktionsprinzip aus Aufgabe 2, um zu beweisen, dass für jeden Schaltkreis X und jeden Buchstaben A zwei (möglicherweise unterschiedliche) Schaltkreise X_1 und X_2 existieren, in denen A jeweils nicht vorkommt, so dass

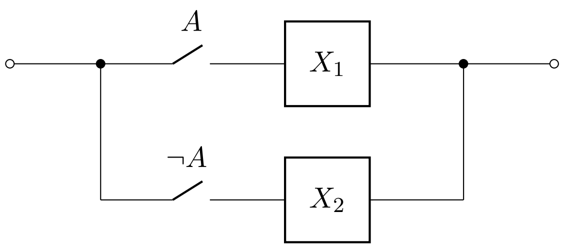


und



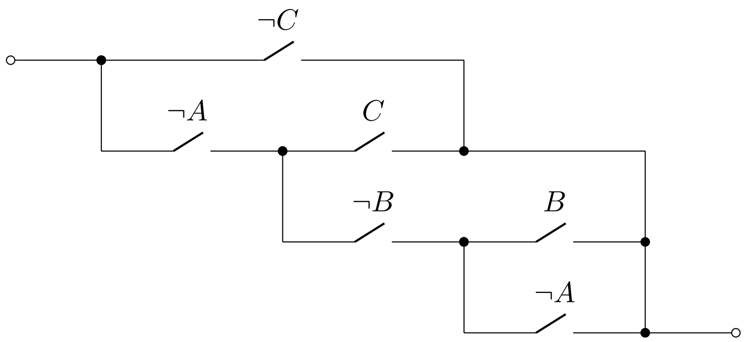
äquivalent sind.

3 Punkte (c) Wir sagen, dass ein Schaltkreis



in *Normalform* ist, wenn A weder in X_1 noch in X_2 vorkommt und sowohl X_1 als auch X_2 in Normalform sind. Zudem sind Kabelabschnitte bzw. durchtrennte Kabelabschnitte in Normalform. Beweisen Sie mithilfe von (b), dass es zu jedem Schaltkreis einen äquivalenten Schaltkreis in Normalform gibt. **Hinweis:** Verwenden Sie Induktion über die Anzahl der Schalter-Buchstaben im gegebenen Schaltkreis. Eventuell benötigen Sie das Verstärkungsprinzip aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 1, um schließen zu können, dass das Verfahren die Anzahl von Schalter-Buchstaben nicht erhöht. Argumentieren Sie, dass (b) unter so einer Verstärkung gültig bleibt.

3 Punkte (d) Bringen Sie den folgenden Schaltkreis in Normalform:



Achtung: Geben Sie alle Zwischenschritte an.

Hinweis: Als Vorbereitungsschritt, versuchen Sie den gegebenen Schaltkreis topologisch äquivalent neu aufzuzeichnen, damit es offensichtlich ist, wie er anhand der Regeln aus Aufgabe 2 ableitbar ist.