Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen: Mo 28.10–Do 31.10

Aufgabe 1 Popeye der Seemann (Präsenzaufgabe)

Popeye hat 5 Dosen Spinat. Er weiß aber, dass genau zwei davon von seinem Gegner *Bluto* ausgetauscht worden sind. Er weiß auch, dass eine von den falschen Dosen genau 1 g leichter und eine genau 1 g schwerer ist als die richtigen. Kann Popeye mit einer Schalenwaage die echten Spinatdosen von den gefälschten trennen und auch genau sagen, welche leichter und welche schwerer ist? Er hat allerdings nur genug Kraft für drei Wägungen.

Aufgabe 2 Verstärkung im Induktionsbeweis (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: Man erfinde eine geeignete Funktion f über den positiven reellen Zahlen, so dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - f(n).$$

Aufgabe 3 Fehlerhafte Induktion (Präsenzaufgabe)

Was ist bei den folgenden Induktionsbeweisen falsch gelaufen?

Alle Zahlen sind gleich.

Wir beweisen mittels Induktion, dass alle zwei benachbarten natürlichen Zahlen gleich sind, d.h. wir beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$n = n + 1$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass diese Formel für alle kleineren Werte von n gilt. Dann muss die Formel insbesondere für den vorherigen Wert des Parameters n, also für $n-1$, wahr sein. Das bedeutet: $(n-1) = (n-1) + 1$, also $n - 1 = n$. Indem wir auf beiden Seiten der Gleichung 1 addieren, erhalten wir $n = n + 1$.

Alle Schafe einer Herde haben die gleiche Farbe.

Beweis per Induktion über die Größe n der Herde:

Induktionsanfang $n = 1$: klar.

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$: Wir betrachten eine Herde von n Schafen. Wenn wir ein Schaf herausnehmen, bleibt eine Herde von $n - 1$ Schafen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben, übrig. Jetzt fügen wir das herausgenommene Schaf wieder hinzu und nehmen ein anderes Schaf heraus; auch hier haben die übriggebliebenen $n - 1$ Schafe nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Also haben alle n Schafe der Herde die gleiche Farbe.

Aufgabe 4 Plangeometrische Induktion (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende Behauptung durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Wir nehmen an, dass $n > 0$ Geraden in einer Ebene liegen, von denen sich keine drei in einem Punkt schneiden und keine zwei parallel sind. Dann wird die Ebene durch die Geraden in genau $(n^2 + n + 2)/2$ Gebiete aufgeteilt.

Hinweis: Zählen Sie bei der Induktion die durch die neu hinzukommende Gerade neu entstehenden Geradenschnittpunkte und schließen sie hieraus auf die Anzahl neu abgeteilter Gebiete.

Aufgabe 5 Mord im Schlosspark (5 Punkte)

Kurz nach einem heftigen Schneefall betrat Kevin Schmitt den Schlosspark durch *Tor D*, ging geradewegs in die Mitte des Parks und wurde mit einem Stich ins Herz ermordet. Sein Körper wurde am nächsten Morgen zusammen mit einer Reihe von Spuren im Schnee gefunden. Die Polizei riegelte den Park sofort ab.

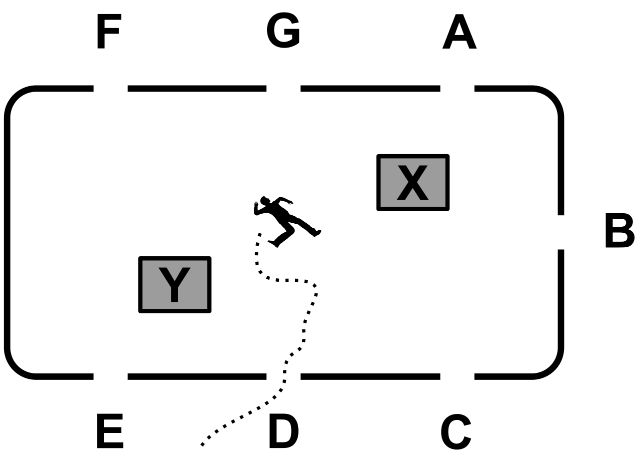

Abbildung 1: Schlosspark: Tatablauf

Wie die sich anschließenden polizeilichen Untersuchungen zeigten, ließ sich jede Spur einem jeweils anderen, sehr typischen Paar Schuhe zuordnen. In der entscheidenden Zeitspanne hatten Zeugen, abgesehen von Schmitt, vier Individuen im Park beobachtet. Daher musste der Mörder einer von ihnen sein. Die Polizei, die die Schuhe der Verdächtigen untersuchte, kam zu folgendem Schluss:

- Der Butler, der beweisen konnte, dass er sich zum Zeitpunkt des Mordes in *Haus X* aufgehalten hatte, hatte den Park durch *Tor E* betreten und war ins *Haus X* gegangen.
- Der Wildhüter, der kein Alibi hatte, hatte den Park durch *Tor A* betreten und seine *Hütte Y* aufgesucht.
- Ein junger Mann aus dem Dorf hatte den Park durch *Tor G* betreten und durch *Tor B* verlassen.

- Die Frau des Krämers hatte den Park durch *Tor C* betreten und durch *Tor F* verlassen.

Keine der Personen betrat oder verließ den Park mehr als ein einziges Mal.

Es war nicht nur Schnee gefallen, sondern auch sehr neblig gewesen, daher waren die Routen, die diese vier Personen eingeschlagen hatten, oft recht verschlungen. Die Polizei stellte fest, dass sich keine zwei Spuren kreuzten. Aber sie unterließ es, eine Skizze der Routen zu machen, bevor der Schnee schmolz und die Spuren verschwanden.

Wer also war der Mörder? Skizzieren Sie zur Begründung zu Ihrer Antwort die Laufwege aller betroffener Personen auf dem Parkplan.

Aufgabe 6 Widerlegung der Riemannschen Vermutung (5 Punkte)

Schauen Sie sich folgende logische Argumentation an:

- Elefanten vergessen nie.
- Kein Geschöpf, das jemals *Mastermind* gewonnen hat, hatte einen Rüssel.
- Ein Geschöpf, das nichts vergisst, wird *Mastermind* stets gewinnen, vorausgesetzt, es nimmt am Turnier teil.
- Ein Geschöpf ohne Rüssel ist kein Elefant.
- Im Jahr 2001 nahm ein Elefant am *Mastermind*-Turnier teil.

Daher gilt:

- Die Riemannsche Vermutung ist falsch.

Ist das eine korrekte Schlussfolgerung? (Eine wunderbare populäre Vermittlung der Riemannschen Vermutung findet sich z.B. in dem Buch *"Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics"* von John Derbyshire*.)

Begründen Sie Ihrer Antwort in natürlicher Sprache, indem Sie z.B. durch *Fallunterscheidung* mögliche Situationen klassifizieren.

Aufgabe 7 Fehlerhafte Induktion (2 Punkte)

Was ist bei dem folgenden Induktionsbeweis falsch gelaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir beweisen für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, dass alle beliebigen n Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist dies klar (der Euklidischen Geometrie liegen entsprechende Axiome zu Grunde). Es bleibt also übrig, die Behauptung für jedes $n > 2$ zu beweisen, vorausgesetzt, dass sie für $n-1$ wahr ist. Seien also $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (für $n > 2$) n beliebige Punkte. Wir betrachten nun die ersten $n-1$ dieser Punkte und wenden die Induktionshypothese an. Wir erhalten die Gerade l, auf der die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ liegen.

Wir müssen beweisen, dass der letzte Punkt A_n auf der gleichen Gerade liegt. Nun betrachten wir die letzten $n-1$ Punkte und wenden erneut die Induktionshypothese an, diesmal auf

*Es ist jedoch keinerlei Verständnis der Riemannschen Vermutung für die Lösung der Aufgabe nötig.

die Punkte $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Wir erhalten eine Gerade l' auf der diese Punkte liegen. Können die Geraden l und l' verschieden sein? Nein, denn sie gehen beide durch die Punkte A_2 und A_{n-1}, und wie wir aus der Geometrie wissen, kann nur eine Gerade durch zwei Punkte gezogen werden. Die Geraden l und l' fallen also zusammen und laufen durch alle n Punkte.

Aufgabe 8 Verstärkung im Induktionsbeweis (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: Man verwende das Induktionsverstärkungprinzip, indem man eine stärkere Ungleichung beweise, und zwar, dass das Produkt kleiner oder gleich $1/\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ ist. Warum ist dies eine stärkere Aussage?

Aufgabe 9 Induktion (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptungen durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Sei x eine reelle Zahl, so dass $x + 1/x$ eine ganze Zahl ist. Dann ist $x^n + 1/x^n$ auch eine ganze Zahl.