Grundlagen der Logik in der Informatik WiSe 2019/20

Klausur [Probe]

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz und Beweise

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

i) $((A \wedge B) \rightarrow C) \models (A \rightarrow (B \rightarrow C))$,

ii) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A)) \models \bot$ (hier steht $\bot$ für *falsum*),

Im negativen Fall reicht es, wenn Sie ein einzelnes Gegenbeispiel angeben.

b) Man betrachte das folgende Beweissskript in Coq:

```
1  Require Import Classical.
2
3  Parameters p q r : Prop.
4
5  Theorem Q1 : (~p -> ~q) -> (q -> p).
6  Proof.
7  intro A.
8  intro B.
9  apply NNPP.
10 intro C.
11 assert (~q).
12 apply A.
13 exact C.
14 contradiction.
15 Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 8—13 das primäre Unterziel (also das, das im nachfolgen Schritt bearbeitet wird) mit den jeweiligen Annahmen jeweils *nach* Durchführung des Schritts an. Für Schritte 5 und 7 wären dies beispielsweise

Schritt 5: Ziel: `(~p -> ~q) -> q -> p`, Annahmen: keine

Schritt 7: Ziel: `q -> p`, Annahmen: `A : ~p -> ~q`

Aufgabe 2 Formalisierung in Prädikatenlogik

Wir betrachten eine naive Mengenlehre mit einem zweistelligen Prädikat $\in$ in Infixschreibweise und einer einstelligen Funktion p. Hierbei nennen wir die Elemente des Grundbereichs *Mengen*; wir lesen $p(x)$ als die Potenzmenge von x, und $x \in y$ wie üblich als „x ist Element von y". Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln erster Stufe über der Signatur $\{p/1, \in/2\}$:

a) x ist Teilmenge von y.

b) Jede Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.

c) Die Potenzmenge einer Menge enthält gerade die Teilmengen dieser Menge.

d) Jede nichtleere Menge enthält ein Element, mit dem sie keine Elemente gemeinsam hat.

e) Jede Menge ist die große Vereinigung ihrer höchstens einelementigen Teilmengen.

Hinweis: Es sollen explizit keine neuen Signatursymbole (wie etwa „große Vereinigung" oder „aus x gebildete einelementige Menge") eingeführt werden. Man muss also gegebenenfalls statt eines Begriffs die ihn definierende Eigenschaft verwenden; Sie dürfen aber Abkürzungen für Formeln einführen. Nicht erklärte Begriffe wie „Teilmenge" und „Vereinigung" sind in ihrer üblichen Bedeutung zu verstehen.

Aufgabe 3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(g(x, h(z)), z) \text{ und } f(g(h(z), h(z)), h(w))$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4 Prädikatenlogische Normalisierung und Resolution

a) Bringen Sie die Formel

$$\forall x((\forall y(R(x, y)) \vee \exists y(R(y, x))) \to \exists z(S(x, z) \wedge S(z, x)))$$

(die Formel selbst, nicht ihre Negation!) in pränexe Normalform, sodann in Skolemform und schließlich in Skolemform mit quantorenfreiem Anteil in CNF (also praktisch in Klauselform, nur zur Zeitersparnis ohne den Schreibweisenwechsel). Geben Sie bei den Umformungen ggf. die nötigen Zwischenschritte an. *Hinweis:* Sie dürfen bei der Umformung in Klauselform Kommutativität der Konjunktion bzw. Disjunktion verwenden; damit lässt sich ggf. etwas Schreibarbeit sparen, da man bei hinreichend geschicktem Vorgehen Skolemfunktionen mit weniger Argumenten erhält.

b) Verwenden Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass die aus den Klauseln

$$\{\neg R(x, y), \neg R(y, z), R(x, z)\}$$
$$\{R(x, f(g(x)))\}$$
$$\{R(f(x), a)\}$$
$$\{\neg R(c, a)\}$$

bestehende Klauselform unerfüllbar ist. In der Klauselform sind x, y, z Variablen und a, c Konstanten.

Aufgabe 5 Formale Deduktion in Prädikatenlogik erster Stufe

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\exists x \forall y(P(x, y)) \to \forall y \exists x(P(x, y))$$

an. (Dabei ist P ein zweistelliges Prädikat.)

Aufgabe 6 Induktion

Sei $\Sigma = \{mult/2, zero/0, one/0\}$, und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell, so dass $M = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}[\![zero]\!] = 0$, $\mathfrak{M}[\![one]\!] = 1$ und für alle $x, y \in M$

$$\mathfrak{M}[\![mult]\!](x, y) = x * y.$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass für jeden geschlossenen Term E (d.h. E enthält keine freien Variablen, formal: $FV(E) = \emptyset$) gilt

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] \in \{0, 1\}.$$

Die Aufgaben sind untereinander gleich gewichtet; die Klausur ist mit der Hälfte der Punkte in jedem Fall bestanden.