# Übungsblatt 6

## Abgabe der Lösungen: 28.01.19

(Aufgaben teils aus Aceto et al., Reactive Systems.)

## Aufgabe 1 Gültige Formeln (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln in Hennessy-Milner-Logik gültig sind, d.h. in jedem Zustand in jedem LTS erfüllt sind

1. $[\alpha](\phi \to \psi) \to ([\alpha]\phi \to [\alpha]\psi)$
2. $\langle\alpha\rangle(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\langle\alpha\rangle\phi \vee \langle\alpha\rangle\psi)$
3. $(\langle\alpha\rangle\phi \wedge [\alpha]\psi) \to \langle\alpha\rangle(\phi \wedge \psi)$.

Dabei sind $\to$ und $\leftrightarrow$ wie üblich durch $\phi \to \psi := \neg\phi \vee \psi$ und $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ definiert.

## Aufgabe 2 Erreichbarkeit und Invarianten (5 Punkte)

Man erinnere sich an die Operatoren *Pos* und *Inv* aus der Vorlesung; wir erweitern diese hier um eine Parametrisierung über eine Menge $A \subseteq \mathcal{A}$ von Aktionen, d.h. wir setzen

$$\begin{aligned} \mathit{Pos}_A(\phi) &= \mu x.\, \phi \vee \langle A\rangle x \\ \mathit{Inv}_A(\phi) &= \nu x.\, \phi \wedge [A]x. \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Erweiterung von HML um diese Operatoren, um die folgenden Eigenschaften von $\mathit{Mutex}_2$ aus Aufgabe 2, Übungsblatt 1 zu formalisieren:

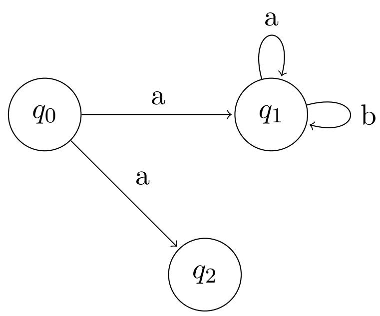
1. Für jeden zukünftigen Zustand $s$ von $\mathit{Mutex}_2$ gibt es einen zukünftigen Zustand $t$ von $s$, so dass $\mathit{User}_1$ von Zustand $t$ aus in den kritischen Abschnitt eintreten kann.
2. $\mathit{User}_1$ und $\mathit{User}_2$ können sich nicht gleichzeitig im kritischen Abschnitt befinden.

*Achtung:* Hierbei müssen wir die Variante des Prozesses verwenden, in der $\mathit{User}_1$ und $\mathit{User}_2$ verschiedene Aktionennamen für das Betreten und Verlassen des kritischen Abschnitts verwenden, d.h. die Definitionen lauten

$$\begin{aligned} \mathit{User}_1 &= \bar{p}.\mathit{enter}_1.\mathit{exit}_1.\bar{v}.\mathit{User}_1 \\ \mathit{User}_2 &= \bar{p}.\mathit{enter}_2.\mathit{exit}_2.\bar{v}.\mathit{User}_2 \\ \mathit{Sem} &= p.v.\mathit{Sem} \\ \mathit{Mutex}_2 &= ((\mathit{User}_1 \mid \mathit{Sem}) \mid \mathit{User}_2)\backslash\{p, v\} \end{aligned}$$

## Aufgabe 3 Rekursive Gleichungen in HML (5 Punkte)

Man betrachte das folgende beschriftete Transitionssystem über Prozessen $q_0$, $q_1$, $q_2$:




Berechnen Sie *alle* Lösungen der folgenden Gleichungen in HML mit einer Variablen $x$:

1. $x = \langle a \rangle \top \wedge [a, b]x$;
2. $x = [b]\bot \vee \langle a, b \rangle x$;
3. $x = [a]\bot \vee [b]x$.

D.h. berechnen Sie für jede Gleichung $x = \phi$ alle Teilmengen $S$ von $\{q_0, q_1, q_2\}$, so dass

$$S = [\![\phi]\!][x \mapsto S].$$

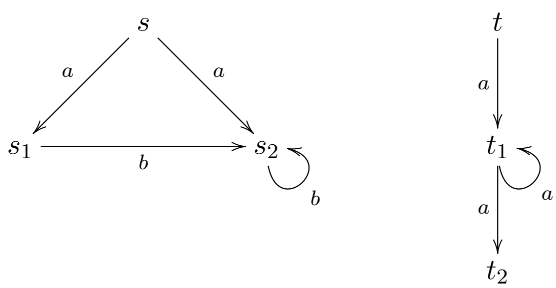
Welche Lösungen $S$ (d.h. kleinste oder größte) welcher dieser Gleichungen werden *über beliebigen Systemen* (nicht nur dem obigen) durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert (in dem Sinne, dass ein Zustand genau dann in $S$ ist, wenn er die betreffende Eigenschaft hat)?

1. Jedes $p \in S$ erreicht nur Zustände, in denen $a$-Transitionen möglich sind.
2. Jedes $p \in S$ kann letztlich in einen Zustand kommen, in dem keine $b$-Transitionen möglich sind.
3. Kein $p \in S$ hat eine unendliche Kette von $b$-Übergängen, die nur durch Zustände führt, in denen $a$-Transitionen möglich sind. (Achtung: was ist mit Ketten von $b$-Übergängen, die in einen Zustand führen, der keine $b$-Übergänge mehr zulässt?)

Begründen sie Ihre Antworten, z.B. mittels der spieltheoretischen Charakterisierung von Erfülltheit oder direkt über die Fixpunktdefinition. (Nur positive Antworten sind gefragt, nicht Gegenbeispiele gegen die jeweils falsche Antwort.)

## Aufgabe 4 Rekursion und Spiele (5 Punkte)

Man betrachte folgende LTS:



Zeigen Sie unter Verwendung der spieltheoretischen Charakterisierung von HML mit Rekursion

- $s_1 \in [\![\nu x.\, \langle b \rangle \top \wedge [b] x]\!]$
- $s \in [\![\mu x.\, \langle b \rangle \top \vee \langle a, b \rangle x]\!]$
- $t \notin [\![\mu x.\, \langle b \rangle \top \vee \langle a, b \rangle x]\!]$.