Übungsblatt 12

Abgabe der Lösungen: –

Aufgabe 1 Die Natürlichen Zahlen als Modell, Fortsetzung (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut das Standardmodell der natürlichen Zahlen aus Übungsblatt 11, Aufgabe 1. und erinnern uns an die Peano-Axiome:

PA_1. $\forall x\ (\neg(0 = s(x)))$;

PA_2. $\forall x, y\ (s(x) = s(y) \to x = y)$;

PA_3. $\forall x\ (x + 0 = x)$;

PA_4. $\forall x, y\ (x + s(y) = s(x + y))$;

PA_5. $\forall x\ (x \times 0 = 0)$;

PA_6. $\forall x, y\ (x \times s(y) = x \times y + x)$;

PA_7. $\forall y_1, \ldots, y_n\ \big(\phi(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \forall x\ (\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \ldots, y_n))$
$\to \forall x\ \phi(x, y_1, \ldots, y_n)\big)$.

Beweisen Sie nun im Fitch-Kalkül, dass $\forall x, y\ (x + y = 0 \to (x = 0 \wedge y = 0))$ aus den Axiomen PA_1–PA_7 folgt.

Aufgabe 2 Modellbau für Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

Da alle Axiome der Peano-Arithmetik über $\mathbb{N}$ gelten, ist die Peano-Arithmetik korrekt über natürlichen Zahlen; d.h. $\mathbb{N} \models \phi$ gilt für jedes Theorem ϕ der Peano-Arithmetik, d.h. für alle durch natürliches Schließen aus den Peano-Axiomen herleitbaren Formeln ϕ. Die Peano-Arithmetik ist dennoch *nicht* vollständig über $\mathbb{N}$; d.h. es gibt Formeln, die über $\mathbb{N}$ gültig, aber keine Theoreme der Peano-Arithmetik sind. Dies ist eine Konsequenz des berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und hat unter anderem zur Folge, dass es strukturell andere Modelle als $\mathbb{N}$ gibt („strukturell anders“ in einem formal präzisen Sinn), die alle Peano-Axiome erfüllen. Solche Modelle werden auch *Nichtstandardmodelle* genannt. Man meint intuitiv, solche Modelle auf recht naive Weise konstruieren zu können, was aber fehlschlägt, wie die folgenden Versuche zeigen:

(a) Erweitern Sie das Modell $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, indem Sie die Semantik von Funktionssymbolen dahingehend vervollständigen, dass ∞ als Ergebnis ausgegeben wird, sobald mindestens ein Argument zu ∞ evaluiert wird.

(b) Beweisen Sie, dass das so definierte Modell kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist (es also ein Peano-Axiom ϕ gibt, so dass $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \not\models \phi$). **Hinweis:** Betrachten Sie das Induktionsaxiom für $\phi(x) = \neg(x = s(x))$.

(c) Betrachten Sie analog zu (a) und (b) die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Paaren von natürlichen Zahlen (x, y) mit $x, y \in \mathbb{N}$ und die folgende elementweise definierte Semantik von 0, s, + und $\times$ über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![0]\!] &= (\mathbb{N}[\![0]\!], \mathbb{N}[\![0]\!]), \\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![s]\!](x, y) &= (\mathbb{N}[\![s]\!](x), \mathbb{N}[\![s]\!](y)), \\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![+]\!]((x, y), (x', y')) &= (\mathbb{N}[\![+]\!](x, x'), \mathbb{N}[\![+]\!](y, y')), \\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![\times]\!]((x, y), (x', y')) &= (\mathbb{N}[\![\times]\!](x, x'), \mathbb{N}[\![\times]\!](y, y')).
\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ebenfalls kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist, indem Sie zeigen, dass

(c. 1) $\forall x, y\ (x+y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$ aus PA_1–PA_7 im Fitch-Kalkül folgt (**Hinweis:** es kann sich lohnen, eine im Fitch-Kalkül bewiesene Hilfsaussage in Anspruch zu nehmen);

(c. 2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models \forall x, y\ (x + y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$.