

# Übungsblatt 10

Abgabe der Lösungen: 24.01, 14:00

---

## Aufgabe 1    Unifikation

(Präsenzaufgabe)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik (siehe Aufgabe 1, Übungsblatt 8) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

(a)  $(x + 0) + (y + 0) \doteq x + s(x)$ ;

(b)  $x + s(y) \doteq 0 + s(s(x))$ .

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf  $x \doteq E$  anwendet, ohne zu prüfen, ob  $x \in FV(E)$ ?

## Aufgabe 2    Wissenswertes über Substitution (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie die folgende Eigenschaft von Substitutionen: für jeden Term  $E$  und alle Substitutionen  $\sigma$  und  $\tau$  gilt

$$E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$$

(man erinnere sich, dass die Substitution  $\sigma\tau$  durch  $(\sigma\tau)(x) = \sigma(x)\tau$  definiert ist).

**Hinweis:** Verwenden Sie Induktion über  $E$ .

## Aufgabe 3    Ärzte und Quacksalber

(Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut die Aussagen aus Aufgabe 3, Übungsblatt 9:

1. “Es gibt einen Patienten, der alle Ärzte mag”:  $\exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow L(x, y)))$

2. “Kein Patient mag irgendeinen Quacksalber”:  $\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

3. “Kein Arzt ist Quacksalber”:  $\forall x (D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

Beweisen Sie nun mittels Resolution, dass die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. folgt.

## Aufgabe 4 Unifikation

(6 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Gruppentheorie (siehe Aufgabe 2, Übungsblatt 9) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

(a)  $z * (x * (x * i(z))) \doteq e * ((y * x) * x);$

2 Punkte

(b)  $i(z * e) * y \doteq y * i(z * i(x)).$

2 Punkte

**Achtung:** Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert jeweils, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf  $x \doteq E$  anwendet, ohne zu prüfen, ob  $x \in FV(E)$ ? 2 Punkte

## Aufgabe 5 Präordnung über Substitutionen

(5 Punkte)

Eine binäre Relation  $\lesssim$  auf einer Menge  $M$  heißt eine *Präordnung* (engl.: *preorder*), wenn für alle  $a, b, c \in M$  folgendes gilt:

*Reflexivität:*  $a \lesssim a,$

*Transitivität:* wenn  $a \lesssim b$  und  $b \lesssim c$ , dann  $a \lesssim c.$

Eine Präordnung  $\lesssim$  heißt *partielle Ordnung*, wenn zusätzlich gilt:

*Antisymmetrie:* Wenn  $a \lesssim b$  und  $b \lesssim a$ , dann  $a = b.$

Sei nun  $\sqsubseteq$  die Relation auf Substitutionen, so dass  $\sigma \sqsubseteq \theta$  gdw.  $\theta$  allgemeiner als  $\sigma$  ist; d.h.  $\sigma \sqsubseteq \theta$  gdw. es eine Substitution  $\tau$  gibt, so dass  $\sigma = \theta\tau.$

(a) Beweisen Sie, dass  $\sqsubseteq$  eine Präordnung ist.

3 Punkte

**Hinweis:** Beweisen Sie die Transitivität von  $\sqsubseteq$  unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 2.

(b) Geben Sie eine Gleichung zwischen Termen an, für welche der Unifikationalgorithmus mindestens **zwei** verschiedene allgemeinste Unifikatoren liefert (dazu muss man natürlich die Regeln in zwei unterschiedlichen Abfolgen anwenden). Das zeigt insbesondere, dass  $\sqsubseteq$  keine partielle Ordnung ist. 2 Punkte

## Aufgabe 6 Familienverhältnisse und Resolution

(9 Punkte)

Für zwei Menschen  $x$  und  $y$  sagen wir, dass  $x$  ein *Vorfahre* von  $y$  ist, wenn  $x$  die *Mutter* oder der *Vater* von  $y$  ist oder es ein  $z$  gibt, so dass  $z$  ein Vorfahre von  $y$  ist und  $x$  die Mutter oder der Vater von  $z$  ist.

(a) Formalisieren Sie die oben beschriebene Eigenschaft als prädikatenlogische Formel über einem zweistelligen Prädikat *Nachfahre*. Sie benötigen hierzu (offensichtlich) weitere Prädikate. Verwenden Sie dennoch keine Gleichungen. 2 Punkte

(b) Formalisieren Sie ferner, was es bedeutet, dass  $x$  ein Enkelkind von  $y$  ist. 2 Punkte

- 5 Punkte (c) Beweisen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, dass *Luke* ein *Nachfahre* von *Shmi* ist, wenn er ihr *Enkelkind* ist.

**Hinweis:** Achten Sie bei Ihrer Formalisierung auf den Unterschied zwischen ‘wenn’ und ‘genau dann wenn’, der auch einen gewissen Einfluss auf die Aufwendigkeit bzw. die Durchführbarkeit des Resolutionsteils der Aufgabe hat.