Übungsblatt 8

Abgabe der Lösungen: 10.01, 14:00

Aufgabe 1 Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!). Die über den Operationen $+$, $\times$, s und der Konstante 0 formulierten Axiome lauten wie folgt:

Giuseppe Peano

PA$_1$: $\forall x\,(\neg(0 = s(x)))$

PA$_2$: $\forall x\,((s(x) = s(y)) \to (x = y))$

PA$_3$: $\forall x\,(x + 0 = x)$

PA$_4$: $\forall x, y\,(x + s(y) = s(x + y))$

PA$_5$: $\forall x\,(x \times 0 = 0)$

PA$_6$: $\forall x, y\,(x \times s(y) = x \times y + x)$

PA$_7$: $\forall y_1, \ldots, y_n\,\big(\phi(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \forall x\,(\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \ldots, y_n)) \to \forall x\,(\phi(x, y_1, \ldots, y_n))\big)$

Pierre de Fermat

Das letzte Axiom ist in Wirklichkeit ein *Axiomenschema*, das für jedes ϕ ein Axiom erzeugt, eine sogenannte *Instanz*. Diese Instanzen heißen erwartungsgemäß *Induktionsaxiome*. Die schematische Formulierung ist eine Annäherung an das eigentlich beabsichtigte Induktionsprinzip, das über eine Prädikaten*variable* P anstelle von ϕ redet, aber in Prädikatenlogik erster Stufe nicht ausdrückbar ist.

(a) Führen Sie zusätzlich zur obigen Signatur binäre Prädikatensymbole für folgende Eigenschaften ein, und definieren Sie diese durch Formeln (mit zwei freien Variablen) in der ursprünglichen Sprache: Eine Zahl ist kleiner als eine weitere Zahl, eine Zahl ist Quadratwurzel einer weiteren Zahl, eine Zahl teilt eine weitere Zahl.

(b) Formalisieren Sie die folgende Aussage in der erweiterten Signatur: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen.

(c) Der große Fermatsche Satz lautet: *"Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat** *in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen"*. Formalisieren Sie die Instanz dieser Aussage für die **fünfte Potenz** in Peano-Arithmetik. **Hinweis:** Formalisieren Sie als erstes die einzelnen Bestandteile der Aussage. Definieren Sie notfalls neue Prädikate wie in Klausel (a).

Aufgabe 2 Freie Variablen (Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie für die folgende Formel die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

$$\forall x\,(\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\,(\mathsf{P}(y))) \wedge \exists y\,(\mathsf{Q}(x)).$$

Aufgabe 3 Variablensubstitution (Präsenzaufgabe)

Man erinnere sich aus der Vorlesung, dass eine *Substitution* eine Funktion ist, die Variablen auf Terme abbildet und dabei alle bis auf endlich viele Variablen auf sich selbst abbildet. Mit $[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n]$ bezeichnen wir für paarweise verschiedene Variablen x_i die Substitution, die jeweils x_i auf E_i abbildet und alle anderen Variablen auf sich selbst.

Für Formeln ϕ und Ausdrücke E wird das Ergebnis $\phi\sigma$ bzw. $E\sigma$ der Anwendung einer Substitution σ auf ϕ bzw. E gemäß Vorlesung wie folgt rekursiv berechnet:

- $x\sigma = \sigma(x)$;
- $f(E_1, \dots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)$, wobei f ein Funktions- oder Prädikatensymbol ist;
- $(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$;
- $(\neg\phi)\sigma = \neg(\phi\sigma)$;
- $(\phi \wedge \psi)\sigma = (\phi\sigma \wedge \psi\sigma)$;
- $(\forall x\,(\phi))\sigma = \forall y\,(\phi\sigma')$, wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ für jedes $z \neq x$, und wobei ferner y so gewählt ist, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x\,(\phi))$.

(Damit ist Substitution natürlich nur bis auf Umbenennung gebundener Variablen eindeutig definiert.)

Berechnen Sie die folgende Substitution:

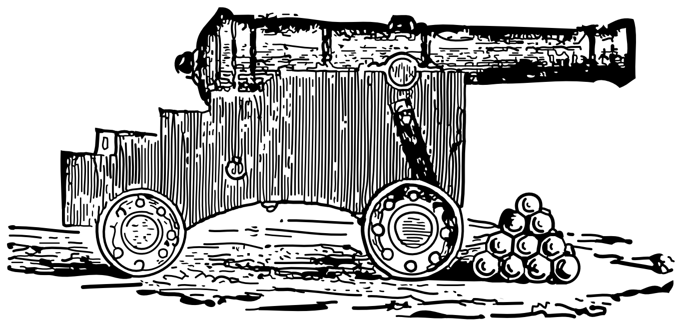
$$(\forall x\,(\mathsf{R}(x, y)) \wedge \mathsf{Q}(y))[c/x, f(x, y)/y, c/z].$$

Achtung: Dabei ist c eine Konstante, und x, y und z sind Variablennamen.

Aufgabe 4 Tetraederzahlen in Peano-Arithmetik (6 Punkte)

* Biquadrat = vierte Potenz

Eine *Tetraederzahl* ist eine Zahl, die sich aus der folgenden geometrischen Eigenschaft ableitet: Legt man Steine zu einem Tetraeder, indem man Dreiecke übereinanderlegt, deren Seitenlängen von oben nach unten jeweils um eins zunehmen, dann entspricht die Gesamtanzahl der verwendeten Steine einer Tetraederzahl. Dabei ist n die Anzahl dieser Dreiecke und damit auch die Anzahl der Steine, die eine Kante des Tetraeders bilden. Ein Beispiel für Tetraederzahlen findet sich bei Dreiecks-Pyramiden, die aus Kanonenkugeln gebildet sind. Die Anzahl der Kanonenkugeln in solchen Pyramiden ist jeweils eine Tetraederzahl. Die ersten Tetraederzahlen sind $0, 1, 4, 10, 20, 35, 56$. Allgemein wird die n-te Tetraederzahl nach der Formel



$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

berechnet.

Formalisieren Sie in der Signatur aus Aufgabe 1 die folgenden Aussagen:

1 Punkt (a) n ist eine Tetraederzahl.

2 Punkte (b) Von zwei aufeinanderfolgenden Tetraederzahlen ist immer mindestens eine durch 4 teilbar.

3 Punkte (c) Es gibt unendlich viele Zahlen, die gleichzeitig eine Tetraederzahl und eine Kubikzahl (=dritte Potenz) sind.

Aufgabe 5 Freie Variablen (4 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Formeln die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

2 Punkte (a) $(\forall x\,(\neg(\forall y\,(\mathsf{S}(x,y)) \to \exists x\,(x = y)))) \to \forall y\,(\mathsf{Q}(x));$

2 Punkte (b) $(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}()) \lor \forall x\,\exists x\,((\mathsf{P}(x) \land \mathsf{Q}(y)) \to \forall y\,(\mathsf{S}(z,z))).$

Aufgabe 6 Variablensubstitution (10 Punkte)

3 Punkte (a) Vervollständigen Sie die Definition aus Aufgabe 3, indem Sie entsprechende Gleichungen für $(\phi \lor \psi)\sigma$ und $(\exists x\,(\phi))\sigma$ angeben, die sich aus der Kodierung von $\phi \lor \psi$ als $\neg(\neg\phi \land \neg\psi)$ und von $\exists x\,(\phi)$ als $\neg(\forall x\,(\neg\phi))$ ergeben.

Achtung: Gefragt sind sowohl die entsprechenden Gleichungen als auch Begründungen, warum sie tatsächlich folgen.

(b) Berechnen Sie die folgenden Substitutionen jeweils **ohne** neue (d.h. nicht bereits in der jeweiligen Formel vorkommende) Variablennamen einzuführen:

2 Punkte (b. 1) $(\exists z\,(\mathsf{S}(x,z) \land \mathsf{S}(z,y)))[c/x, f(x,z)/y, c/z];$

(b. 2) $(\exists y\, (\mathsf{P}(z, y)) \wedge \forall y\, (\mathsf{S}(y, z) \vee \exists z\, (\top)))[f(x, y)/x, x/y, f(g(x), z)/z]$. *2 Punkte*

Achtung: Dabei ist c eine Konstante, und x, y und z sind Variablennamen.

(c) Eine *Variablenpermutation* ist eine Substitution der Form $[x_{n_1}/x_1, \ldots, x_{n_k}/x_k]$ (mit $n_i \in \{1, \ldots, k\}$, $i = 1, \ldots, k$), die *injektiv* ist, d.h. $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ für $i \neq j$ (Achtung: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ setzen wir bei der $[\ldots]$-Schreibweise generell voraus). *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass man, wenn σ eine Variablenpermutation ist, in der Definition von $(\forall x\, (\phi))\sigma$ wie in Aufgabe 3 die Substitution σ' einfach als $\sigma' = \sigma$ wählen kann. Wie wählt man y in $\forall y(\phi\sigma')$? Begründen Sie Ihre Antwort.