Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2018

Übungsblatt 6

Abgabe der Lösungen: 13.12, 14:00

Aufgabe 1 DNF: Do it Yourself (Präsenzaufgabe)

Eine Grundeigenschaft der Aussagenlogik ist die *Dualität*: Konjunktion und Disjunktion sind zueinander *dual* in dem Sinne, dass

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale *disjunktive Normalform (DNF)*, bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Aufgabe 2 CNF und DNF (Präsenzaufgabe)

Bilden Sie zunächst NNF und dann sowohl CNF als auch DNF für eine der folgenden aussagenlogischen Formeln:

1. $\neg(A \to B) \wedge ((A \to (B \wedge C)) \to \neg C)$.
2. $(B \to \neg A) \to ((C \to \neg A) \to (A \wedge B \wedge (C \to \neg B)))$.

Achtung: Die Ergebnisse sollen gemäß der Umformungsregeln bzw. der rekursiven Definitionen aus der Vorlesung bzw. aus der obigen Aufgabe berechnet werden. Die bloße Angabe einer richtigen Antwort gilt nicht als Lösung. Im Laufe der Rechnung können dabei Formeln mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$ sowie **ausschließlich** der folgenden weiteren Gesetze vereinfacht bzw. umgeformt werden: $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$, $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$, $\phi \wedge \top \equiv \phi$, $\phi \wedge \bot \equiv \bot$, $\phi \vee \top \equiv \top$, $\phi \vee \bot \equiv \phi$.

Aufgabe 3 Resolution (Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie erneut das Beispiel aus der Vorlesung:

$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit der gegebenen Klauselmenge. Organisieren Sie den Beweis in Form eines gerichteten Graphen, mit Klauseln als Knoten und gerichteten Kanten, die Klauseln mit ihren Resolventen verbinden.

Aufgabe 4 CNF und DNF (4 Punkte)

Bilden Sie zunächst NNF und dann sowohl CNF als auch DNF für die folgende aussagenlogische Formel:

$$\neg(B \wedge (A \to \neg B)) \wedge \neg(A \to (B \wedge \neg C)) \wedge (C \vee B).$$

Achtung: Beachten Sie dabei die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe 2.

Aufgabe 5 Resolution (2 Punkte)

Analog zu Aufgabe 3, konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit der gegebenen Klauselmenge:

$$\{D, B, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{\neg C, B, A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Aufgabe 6 Resolutionsprinzip falsch gemacht (6 Punkte)

(a) *Inkorrekte Resolution.* Die folgende Resolutionsregel ist *inkorrekt*, in dem Sinne, dass sie den Korrektheitssatz nicht erfüllt. *3 Punkte*

$$\frac{C \cup \{A, B\} \qquad D \cup \{\neg A, \neg B\}}{C \cup D} \quad (Res_1)$$

Beweisen Sie das, indem Sie Klauseln C und D sowie eine Wahrheitsbelegung κ angeben, so dass κ die Prämissen erfüllt, aber nicht die Konklusion.

(b) *Unvollständige Resolution.* Man könnte versuchen, im Resolutionsverfahren statt Klauseln Listen von Literalen zu verwenden. Die Resolutionsregel würde dann lauten: *3 Punkte*

$$\frac{H_1 + [A] + T_1 \qquad H_2 + [\neg A] + T_2}{H_1 + H_2 + T_1 + T2} \quad (Res_2)$$

wobei $[A]$ die aus dem Eintrag A bestehende einelementige Liste und $+$ die Listenkonkatenation bezeichnet.

Zeigen Sie, dass ein auf allein dieser Regel basierendes Resolutionsverfahren nicht vollständig ist, indem Sie (mit formaler Begründung!) eine Menge M von Listen von Literalen angeben, für die das neue Verfahren keine leere Liste liefert, obwohl M einer unerfüllbaren CNF entspricht.

Hinweis: Man findet relativ kleine Beispiele. Betrachten Sie die Länge der Listen, die in Laufe des Verfahrens auftauchen können.

Aufgabe 7 (Dame $\vee$ Tiger) $\wedge$ Resolution (4 Punkte)

Der Gefangene aus Aufgabe 3, Übungsblatt 3 ist jetzt mit dem Resolutionsverfahren bewaffnet. Kann er damit im **Fall 1** bestimmen, in welchem Raum sich die Damen befindet und in welchem die Tiger? Verwenden Sie Ihre aussagenlogische Formalisierung aus Aufgabe 3, Übungsblatt 3. Die notwendige Angaben sind bequemlichkeitshalber wie folgt zusammengefasst.

Die Schilder an den entsprechenden Türen:

Raum I	**Raum II**
In diesem Raum ist eine Dame, oder in dem anderen Raum ist ein Tiger.	In diesem Raum ist eine Dame.

Der König sagt: "Beide Aussagen sind wahr".

Aufgabe 8 Logische Folgerung durch Resolution (4 Punkte)

Beweisen Sie mittels Resolution, dass aus

$$\neg(B \wedge (\neg A \wedge \neg C)), \quad ((A \to C) \wedge B) \vee (C \wedge A)$$

C folgt. Verfahren Sie hierzu wie folgt:

1. Bilden Sie eine aussagenlogische Implikation $\phi \to \psi$ zwischen den Fakten (ϕ) und der (angeblichen) Folgerung (ψ).
2. Bilden Sie $\xi = \neg(\phi \to \psi) = \phi \wedge \neg\psi$ (die Implikation $\phi \to \psi$ ist genau dann allgemeingültig, wenn ξ unerfüllbar ist).
3. Berechnen Sie NNF und anschließend CNF von ξ, in Form einer Klauselmenge M.
4. Wenden Sie das Resolutionsverfahren auf M an.