Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen: 6.12, 14:00

Aufgabe 1 Beweis durch Fallunterscheidung (Präsenzaufgabe)

Beweis durch Fallunterscheidung ist eine Beweisstrategie, die man wie folgt beschreiben kann: Um einen Satz ϕ zu beweisen, reicht es aus, ein ψ zu finden, so dass sowohl ψ als auch $\neg\psi$ (jeweils für sich genommen natürlich) ϕ implizieren.

(a) Zeigen Sie, dass der Beweis durch Fallunterscheidung ein gültiges Prinzip des Fitch-Kalküls ist. Führen Sie zu diesem Zweck eine neue Fitch-Regel ein, die den Beweis durch Fallunterscheidung implementiert, und zeigen Sie, dass diese im Fitch-Kalkül herleitbar ist.

(b) Implementieren Sie das Fallunterscheidungsprinzip in Coq. Vervollständigen Sie hierzu den folgenden Coq-Beweis:

```
Require Import Classical_Prop.            (* liefert u.a. NNPP, d.h. ~ E *)

Section Fallunterscheidung.               (* Anfang des Namensraums *)
Variables x y: Prop.                      (* Lokale Variablen *)
Lemma FU : ((x -> y) /\ (~x -> y)) -> y.
Proof.
                                          (* Beweis hier einfügen *)
Qed.
End Fallunterscheidung.                   (* Ende des Namensraums *)
```

(c) Beweisen Sie das *Gödel-Dummett-Axiom* $(A \to B) \vee (B \to A)$ mithilfe des Fallunterscheidungsprinzips.

Aufgabe 2 Herleitungen in Coq (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende logische folgerungen in Coq:

2 Punkte (a) $\phi \to (\psi \wedge \xi) \vdash (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \xi)$;

2 Punkte (b) $\phi \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg(\phi \to \psi)$.

2 Punkte (c) $(\phi \to \psi) \to \phi \vdash \phi$;

Dabei dürfen Sie ausschließlich die Taktiken `intro`, `apply`, `exact`, `assumption`, `split`, `left`, `right`, `contradiction`, `destruct` und `assert` benutzen. Zusätzlich dürfen Sie – jedoch höchstens einmal – das in Aufgabe 1 bewiesene Lemma verwenden. Dieses lässt sich wie folgt aufrufen:

`apply FU with (x:=`ψ`).`

(wobei ψ eine geeignete aussagenlogische Formel ist); dadurch wird das aktuelle Ziel ϕ mit der Konjunktion $(\psi \to \phi) \wedge (\neg\psi \to \phi)$ ersetzt.

Aufgabe 3 Elefantengedächtnis (5 Punkte)

Wir erinnern uns an die fünf Annahmen aus Aufgabe 3, Übungsblatt 2:

- Elefanten vergessen nichts.
- Wer *Mastermind* gewinnt, hat keinen Rüssel.
- Wer nichts vergisst, gewinnt *Mastermind*, vorausgesetzt, er nimmt am Turnier teil.
- Wer keinen Rüssel hat, ist kein Elefant.
- Ein Elefant nimmt am *Mastermind*-Turnier teil.

Beweisen Sie, dass die fünf Annahmen zusammengenommen unerfüllbar sind. Führen Sie Ihren Beweis nach Ihrer Wahl in Fitch oder in Coq. Ihren eventuellen Coq-Beweis soll dabei wieder nur die in Aufgabe 2 angegeben Taktiken verwenden.

Hinweis: Um die Widersprüchlichkeit der fünf Annahmen A_1 bis A_5 zu zeigen, genügt es, die Formel

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \rightarrow \bot$$

in Coq zu beweisen; die Formel $\bot$ lässt sich in Coq als `False` kodieren.

Aufgabe 4 NNF und Fehlstände (9 Punkte)

(a) Eine Formel wird gemäß Vorlesung mittels erschöpfender Anwendung der folgenden Umformungen in *Negationsnormalform* (NNF) gebracht: *3 Punkte*

$$\neg\neg\phi = \phi \qquad \neg(\phi \wedge \psi) = \neg\phi \vee \neg\psi \qquad \neg(\phi \vee \psi) = \neg\phi \wedge \neg\psi \qquad \neg\bot = \top \qquad \neg\top = \bot.$$

D.h. um eine NNF einer Formel zu bekommen, wendet man die obigen Regeln wiederholt an, solange es möglich ist, und darf dabei beliebig tief innerhalb der aktuellen Formel die Regeln anwenden. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren terminiert; definieren Sie hierzu eine Maßfunktion m, die aussagenlogische Formeln auf natürliche Zahlen abbildet, und beweisen Sie, dass für jede Regel außer der für die doppelte Negation (!) Ihre Funktion auf die rechte Seite der Regel angewendet eine echt kleinere Zahl ergibt, als wenn sie auf die linke Seite der Regel angewendet wird. Die Funktion m soll allerdings so definiert werden, dass zusätzlich für m die folgende Eigenschaft (b) gelten soll.

Hinweis: Definieren Sie m rekursiv über der Struktur von Formeln, sodass $m(\phi)$ die Anzahl der *Fehlstände* in ϕ ausgibt; ein Fehlstand ist hierbei ein Paar von Vorkommen von Operatoren in ϕ, von denen der erste Operator eine Negation ist und der zweite Operator keine Negation ist (!) und in der Termstruktur von ϕ unterhalb des ersten Operators steht; hierbei zählen zwar $\top$ und $\bot$ als (nullstellige) Operatoren, nicht aber aussagenlogische Atome. Beispielsweise gilt dann $m(\neg(A \wedge \neg(\top \vee \neg C))) = 3 + 2 = 5$ und $m(\neg A \vee \neg B) = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass, wenn $m(\phi) > m(\psi)$ für zwei aussagenlogische Formeln ϕ und ψ gilt, wobei ϕ und ψ die linke bzw. rechte Seite einer der Ersetzungsregeln sind, dann auch $m(\phi') > m(\psi')$ gilt, wobei ϕ' eine beliebige Formel ist, die ϕ als Teilformel beinhaltet, und wobei ψ' aus ϕ' hervorgeht, indem ein (einzelnes!) Vorkommen von ϕ durch ψ ersetzt wird. *5 Punkte*

Hinweis: Beweisen Sie die Eigenschaft per Induktion über ϕ'. Als Hilfsaussage müssen Sie als erstes beweisen, dass die Funktion, die für jede Formel θ die Anzahl von in θ enthaltenen Operatoren außer $\neg$ ausgibt, eine analoge Eigenschaft hat (allerdings mit $=$ anstelle von $>$).

1 Punkt (c) Berechnen Sie eine NNF von $\phi = \neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \vee \neg C)))$.

Bonusaufgabe: Maximal konsistente Mengen (+3 Punkte)

Wie Sie sich aus der Vorlesung erinnern, ist der zentrale Schritt im Beweis der Vollständigkeit des natürlichen Schließens der Beweis des Lindenbaumlemmas, d.h. der Tatsache, dass jede konsistente Menge zu einer maximal konsistenten Menge erweitert werden kann.

Sei $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Atome, und sei Φ die Formelmenge $\{A_i \leftrightarrow A_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(a) Beweisen Sie, dass Φ konsistent ist. Nutzen Sie dafür den Korrektheitsatz aus der Vorlesung.

(b) Beweisen Sie, dass es genau **zwei** maximal konsistente Mengen gibt, die Φ erweitern.

Hinweis: Sie dürfen die Resultate der Vorlesung verwenden.