Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen: 22.11, 14:00

Aufgabe 1 Triviale Falschheit (Präsenzaufgabe)

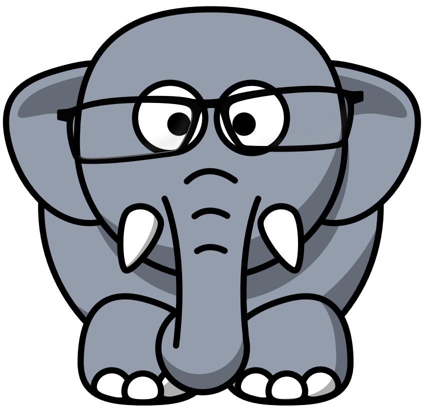
Das **Induktionsprinzip für aussagenlogische Formeln** lautet: um zu zeigen, dass eine Eigenschaft P für alle aussagenlogischen Formeln ϕ gilt, zeige, (*Induktionsbasis*) dass P für $\phi = \bot$ gilt sowie für alle atomaren $\phi \in \mathcal{A}$; (*Induktionsschritt*) dass, wenn P für Formeln ϕ und ψ gilt, dann auch für $\phi \wedge \psi$ und $\neg\phi$.

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel, die nur aus Konjunktionen, Atomen und Wahrheitskonstanten ($\top$ und $\bot$) gebildet ist (wobei $\top$ wie üblich die Abkürzung für $\neg\bot$ ist):

$$\phi, \psi ::= A \in \mathcal{A} \mid \top \mid \bot \mid \phi \wedge \psi$$

Zeigen Sie mittels des obigen Induktionsprinzips, dass für jede Wahrheitsbelegung κ, für die es ein Atom $A \in \mathcal{A}$ mit $\kappa(A) = \bot$ gibt, gilt: Wenn A in ϕ vorkommt, dann $\kappa \not\models \phi$.

Aufgabe 2 "Elefanten vs. Mastermind", formal (Präsenzaufgabe)



Wir erinnern uns an die in Aufgabe 6, Übungsblatt 1 aufgestellten Annahmen (wobei wir sie hier nun etwas präziser formulieren, um sie leichter formalisieren zu können):

- Elefanten vergessen nichts.
- Wer *Mastermind* gewinnt, hat keinen Rüssel.
- Wer nichts vergisst, gewinnt *Mastermind*, vorausgesetzt, er nimmt am Turnier teil.
- Wer keinen Rüssel hat, ist kein Elefant.
- Ein Elefant nimmt am *Mastermind*-Turnier teil.

Betrachten Sie die einzelnen Teilaussagen (wie z.B. "ist Elefant" oder "vergisst nicht") als aussagenlogische Atome.

(a) Formalisieren Sie die fünf Annahmen als aussagenlogische Formeln.

(b) Sind die fünf Annahmen zusammen genommen erfüllbar? Falls die enstehende Formel erfüllbar ist, genügt es, eine entsprechende Wahrheitsbelegung anzugeben. Falls die Formel unerfüllbar ist, ist eine Wahrheitstafel anzugeben, die die Unerfüllbarkeit der Formel zeigt.

Hinweis: Erschrecken Sie nicht, es gibt bis zu 32 in Frage kommende Wahrheitsbelegungen.

Aufgabe 3 Dame oder Tiger (8 Punkte)

Dame oder Tiger ist ein logisches Rätsel des US-amerikanischen Mathematikers und Logikers Raymond Smullyan. Es handelt von Räumen sowie Damen und Tigern, die in diesen Räumen zu finden sind. Im Rätsel darf ein Gefangener des Königs von Indrabad einmal zwischen zwei Türen wählen und seiner Wahl zufolge entweder eine Dame gewinnen (!) oder von einem wilden Tiger zerfleischt werden. Er weiß folgendes: In den beiden Räumen (**Raum I** und **Raum II**) befindet sich jeweils entweder genau eine Dame oder genau ein Tiger. Insbesondere ist es auch möglich, dass sich in beiden Räumen Damen oder in beiden Räumen Tiger aufhalten. Humanerweise besteht insofern keine Pflicht, eine Tür zu wählen, und wenn der Gefangene geschlossen hat, dass ihn hinter beiden Türen ein Tiger erwartet, dann ist es sinnvoll, auf die Wahl zu verzichten. Als weitere Hinweise stehen dem Gefangenen nur Schilder, die an den Türen hängen, zur Verfügung, deren Wahrheitsgehalt allerdings zunächst unklar ist, sowie (glaubwürdige) Aussagen des Königs über den Wahrheitsgehalt der Schilder.

Wir betrachten hier zwei Varianten des Rätsels wie folgt:

Fall 1: Die Schilder an den entsprechenden Türen:

Raum I	**Raum II**
In diesem Raum ist eine Dame, oder in dem anderen Raum ist ein Tiger.	In diesem Raum ist eine Dame.

König: Beide Aussagen sind wahr.

Fall 2: Die Schilder an den entsprechenden Türen:

Raum I	**Raum II**
In beiden Räumen zusammen befinden sich insgesamt zwei Damen.	In beiden Räumen zusammen befindet sich mindestens ein Tiger.

König: Die Aussage auf dem Schild vor Raum I ist wahr, wenn sich eine Dame in Raum I befindet, sie ist falsch, wenn ein Tiger in Raum I ist. Die Aussage auf dem Schild vor Raum II ist falsch, wenn sich eine Dame in Raum II befindet, sie ist wahr, wenn ein Tiger in Raum II ist.

Überprüfen Sie mithilfe der Aussagenlogik, ob es für den Gefangenen eine Gewinnstrategie in diesen zwei Szenarios gibt? Formalisieren Sie dazu die Angaben in Aussagenlogik. Prüfen Sie dann, ob die Aussagen „Eine Dame ist in Raum I“ bzw. „Eine Dame ist in Raum II“ logische Folgerungen daraus folgen, indem Sie entsprechende Wahrheitstafen bilden.

Aufgabe 4 Negationsnormalform (12 Punkte)

Eine aussagenlogische Formel ist in *Negationsnormalform (NNF)*, wenn sie durch die folgende Grammatik erzeugt werden kann:

$$\psi, \xi ::= A \mid \neg A \mid \psi \wedge \xi \mid \psi \vee \xi \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Dabei ist $\psi \vee \xi$, wie in der Vorlesung, Abkürzung für $\neg(\neg\psi \wedge \neg\xi)$.

Eine bekannte Tatsache ist, dass jede Formel ϕ in eine NNF ϕ' umgeformt werden kann, so dass ϕ und ϕ' logisch äquivalent sind (natürlich unter der Annahme, dass $\mathcal{A}$ nicht leer ist). Wir zeigen das indirekt mittels des in Übungsblatt 2 eingeführten "Schaltkreiskalküls".

5 Punkte (a) Zeigen Sie, dass es für jede Formel ϕ einen Schaltkreis gibt, durch den genau dann Strom fließt, wenn ϕ erfüllt ist. Verwenden Sie dafür das Induktionsprinzip für aussagenlogische Formeln von Aufgabe 1.

Hinweis: Um Negation zu behandeln, verwenden Sie die Ergebnisse von Übungsblatt 2, Aufgabe 2.

4 Punkte (b) Zeigen Sie, dass es für jeden Schaltkreis eine Formel ϕ in NNF gibt, die genau dann erfüllt ist, wenn durch den Schaltkreis Strom fließt. Verwenden Sie dabei das Induktionsprinzip für Schaltkreise aus Übungsblatt 2, Aufgabe 2.

3 Punkte (c) Bringen Sie die folgende Formel mithilfe der Teilaufgaben (a) und (b) in NNF:

$$((A \to B) \vee B) \to (A \vee B)$$

Genauer gesagt: Übersetzen Sie die gegebene Formel in einen Schaltkreis (der entstehende Schaltkreis entspricht der Formel in NNF) und wandeln Sie ihn anschließend wieder in eine Formel um.

Achtung: Hierbei ist $\phi \to \psi$ wie üblich die Abkürzung für $\neg\phi\vee\psi$ und $\phi\vee\psi$ die Abkürzung für $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Es ist ausserdem ausdrücklich nicht erlaubt, Vereinfachungsregeln für Formeln zu verwenden; Sie dürfen jedoch jederzeit Formeln $\neg\neg\phi$ durch ϕ ersetzen.

Gebeten Sie die Zwischenschritte an!