

Übungsblatt 1 (Zusatzaufgaben)

Abgabe der Lösungen: —

Aufgabe 1 Zusatzaufgabe: Induktion

Beweisen Sie die *Gaußsche Summenformel* mittels Induktion, d.h. beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 2 Zusatzaufgabe: Induktion

Beweisen Sie *mittels Induktion*, dass jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist, d.h. dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$, so dass entweder $n = 2l$ oder $n = 2l + 1$.

Aufgabe 3 Zusatzaufgabe: Induktion

Beweisen Sie mittels Induktion, dass

1. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$, $n! > 2^n$.
2. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$, $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$.
3. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 7$ zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $n = 3x + 5y$.

Hinweis: Wie üblich nehmen wir hier an, dass $0 \in \mathbb{N}$.

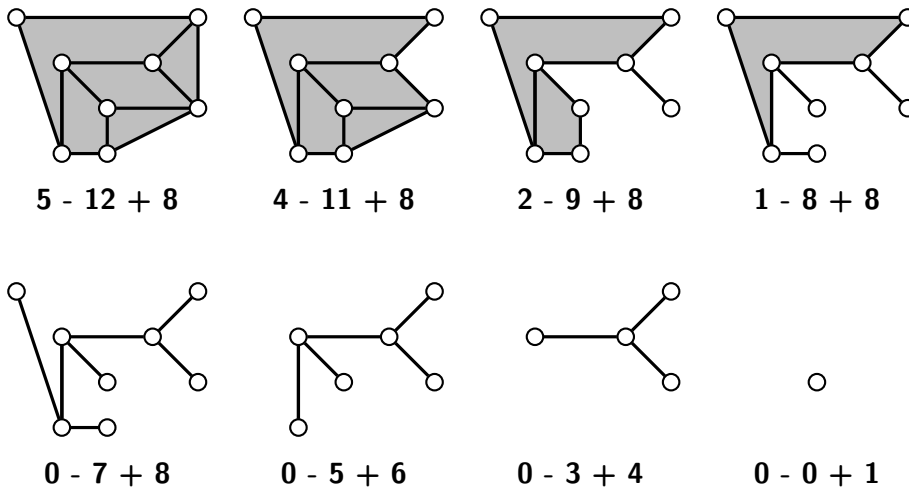
Aufgabe 4 Zusatzaufgabe: Eulersche Formel

Ein *planarer Graph* besteht aus einer Menge von Knoten V auf einer Ebene zusammen mit (unorientierten) geraden Strecken E , die Paare von unterschiedlichen Knoten in solcher Weise verbinden, dass sich keine zwei Strecken überschneiden (abgesehen natürlich von den Endpunkten). Jeder planare Graph teilt die Ebene in zusammenhängende Gebiete (die auch als Flächen bezeichnet werden), die von den Kanten des Graphen begrenzt werden. Sei F die Menge dieser Flächen, ohne das unbeschränkte Gebiet um den Graphen herum.

Beweisen Sie, dass für jeden zusammenhängenden (d.h. die Knoten sind paarweise durch eine Kantenfolge im Graphen verbunden) planaren Graphen die eulersche Formel gilt:

$$|F| - |E| + |V| = 1$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich anhand der folgenden Beispiele, dass die Formel gilt:



Verwenden Sie Induktion über $|E|$. Sie dürfen ohne Beweis die folgende Tatsache benutzen: jeder nichtleere zusammenhängende Graph kann aus dem einpunktigen Graph induktiv konstruiert werden, in dem man schrittweise neue Kanten hinzufügt, die entweder zwei schon vorhandene Punkte oder einen schon vorhandenen und einen neu hinzugefügten Punkt verbinden, und alle Zwischenergebnisse bleiben dabei zusammenhängend.