Übungsblatt 6

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 5.12.-9.12.

Aufgabe 1 DNF: Do it Yourself (Präsenzaufgabe)

Eine Grundeigenschaft der Aussagenlogik ist die *Dualität*: Konjunktion und Disjunktion sind zueinander *dual* in dem Sinne, dass

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale *disjunktive Normalform (DNF)*, bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Achtung: Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Aufgabe 2 NNF, CNF und DNF (Präsenzaufgabe)

Bilden Sie NNF, CNF und DNF für eine der folgenden aussagenlogischen Formeln:

1. $\neg(A \wedge B \wedge ((A \vee B) \to (B \wedge \neg C)))$;
2. $\neg((A \wedge B \wedge (C \to \neg B)) \to \neg(A \to (\neg B \wedge \neg C)))$.

Achtung: Die Ergebnisse sollen gemäß der Umformungsregeln bzw. der rekursiven Definitionen aus der Vorlesung bzw. aus der obigen Aufgabe berechnet werden. Die bloße Angabe einer richtigen Antwort gilt nicht als Lösung. Im Laufe der Rechnung können dabei Formeln mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$ sowie **ausschließlich** der folgenden weiteren Gesetze vereinfacht bzw. umgeformt werden: $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$, $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$.

Aufgabe 3 Resolution (Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie erneut das Beispiel aus der Vorlesung:

$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit der gegebenen Klauselmenge. Organisieren Sie den Beweis in Form eines gerichteten Graphen, mit Klauseln als Knoten und gerichteten Kanten, die Klauseln mit ihren Resolventen verbinden.

Aufgabe 4 NNF, CNF und DNF (5 Punkte)

Bilden Sie NNF, CNF und DNF für die folgende aussagenlogische Formel:

$$\neg(C \wedge B \wedge (C \to \neg B)) \wedge \neg(A \to B \wedge \neg C) \wedge (A \vee B).$$

Achtung: Beachten Sie dabei die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe 2.

Aufgabe 5 Resolutionsprinzip falsch gemacht (6 Punkte)

(a) *Inkorrekte Resolution.* Die folgende Resolutionsregel ist *inkorrekt*, in dem Sinne, dass sie den Korrektheitssatz nicht erfüllt. *3 Punkte*

$$\frac{C \cup \{A, B\} \qquad D \cup \{\neg A, \neg B\}}{C \cup D} \quad (Res_1)$$

Beweisen Sie das, indem Sie Klauselmengen C und D sowie eine Wahrheitsbelegung κ angeben, so dass κ die Prämissen erfüllt, aber nicht die Konklusion.

(b) *Unvollständige Resolution.* Man könnte versuchen, im Resolutionsverfahren statt Klauseln Listen von Literalen zu verwenden. Die Resolutionsregel würde dann lauten: *3 Punkte*

$$\frac{H_1 \;++\; [A] \;++\; T_1 \qquad H_2 \;++\; [\neg A] \;++\; T_2}{H_1 \;++\; H_2 \;++\; T_1 \;++\; T2} \quad (Res_2)$$

wobei $[A]$ die aus dem Eintrag A bestehende einelementige Liste und ++ die Listenkonkatenation bezeichnet.

Zeigen Sie, dass ein auf allein dieser Regel basierendes Resolutionsverfahren nicht vollständig ist, indem Sie (mit formaler Begründung!) eine Menge M von Listen von Literalen angeben, für die das neue Verfahren keine leere Liste liefert, obwohl M einer unerfüllbaren CNF entspricht.

Hinweis: Man findet relativ kleine Beispiele. Betrachten Sie die Länge der Listen, die in Laufe des Verfahrens auftauchen können.

Aufgabe 6 Beweisen und Widerlegen mittels Resolution (5 Punkte)

(a) Führen Sie per Resolution den Beweis, dass die logische Folgerung aus Aufgabe 5, Übungsblatt 1 unter der zusätzliche Annahme, dass Schweine fliegen können, gilt. *2 Punkte*

(b) Führen Sie ebenso per Resolution den Beweis, dass die gleiche Folgerung ohne die zusätzliche Annahme, dass Schweine fliegen können, nicht gilt. *3 Punkte*

Gehen Sie dazu für jede der beiden Teilaufgaben nach folgendem Verfahren vor:

1. Bilden Sie eine aussagenlogische Implikation $\phi \to \psi$ zwischen den Fakten (ϕ) und der (angeblichen) Folgerung (ψ).

2. Bilden Sie $\xi = \neg(\phi \to \psi) = \phi \wedge \neg\psi$ (die Implikation $\phi \to \psi$ ist genau dann gültig, wenn ξ unerfüllbar ist).
3. Berechnen Sie NNF und anschließend CNF von ξ, in Form einer Klauselmenge M.
4. Wenden Sie das Resolutionsverfahren auf M an.

Hinweis: In der Teilaufgabe (b) ist zu erwarten, dass das Resolutionsverfahren 'erfüllbar' antwortet; darum muss man eventuell damit rechnen, dass es etwas dauert, bis das Verfahren terminiert.

Aufgabe 7 Resolution (4 Punkte)

Beweisen Sie mittels Resolution, dass aus

$$(A \to B) \to C, \quad (B \to C) \to A, \quad (C \to A) \to B$$

die Konjunktion von A, B und C folgt. Befolgen Sie dabei die Anweisungen aus Aufgabe 6.