Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

January 29, 2016

Prädikatenlogische Modelle

Sei Σ eine Signatur und V eine Menge von Variablen.

Σ-Modell

Ein Σ-Modell $\mathfrak{M}$ besteht aus

- einer Menge M (Universum, (Grund)bereich oder Träger);
- einer Interpretation in $\mathfrak{M}$ für jedes n-stellige Funktionssymbol $f/n \in \Sigma$, gegeben durch eine Funktion $\mathfrak{M}[\![f]\!] : M^n \to M$
- einer Interpretation in $\mathfrak{M}$ für jedes n-stellige Prädikatensymbol $P/n \in \Sigma$, gegeben durch eine Teilmenge $\mathfrak{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$.

Eine Umgebung η (in $\mathfrak{M}$) ist eine Abbildung $\eta : V \to M$.

Prädikatenlogische Modelle

Interpretation von Termen, Erfülltheit

Die Interpretation $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta \in M$ eines Terms E ist rekursiv definiert:

$$\mathfrak{M}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$$

$$\mathfrak{M}[\![f(E_1, \ldots, E_n)]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![f]\!]\left(\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \ldots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta\right)$$

Die Erfülltheit einer Formel φ ist rekursiv definiert:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, \eta \models (E = D) &\iff \mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \mathfrak{M}[\![D]\!]\eta \\
\mathfrak{M}, \eta \models P(E_1, \ldots, E_n) &\iff (\mathfrak{M}[\![E_1]\!]\eta, \ldots, \mathfrak{M}[\![E_n]\!]\eta) \in \mathfrak{M}[\![P]\!] \\
\mathfrak{M}, \eta \models \forall x.\varphi &\iff \text{für alle } m \in M \text{ gilt } \mathfrak{M}, \eta[x \mapsto m] \models \varphi
\end{aligned}$$

und durch die erwarteten Klauseln für die booleschen Fälle, wobei

$$\eta[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & (y = x) \\ \eta(y) & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Aufgabe 1 - Die Natürlichen Zahlen als Modell

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Stellen Sie $\mathbb{N}$ als ein Modell der Signatur $\Sigma = (\emptyset, \{0/0, s/1, +/2, \times/2\})$ dar. Drücken Sie die folgenden Sätze als Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe aus:

1. x ist kleiner oder gleich y (Achtung: $\leq$ gehört nicht zur Signatur)
2. 0 ist die kleinste natürliche Zahl
3. x ist ein Teiler von y
4. x ist eine Dreieckszahl (d.h. x ist ein Binomialkoeffizient der Form $\binom{y+1}{2}$ für geeignetes y)

Überprüfen Sie dann die folgende Sätze der Peano-Arithmetik:

1. $\mathbb{N} \models \forall x.\, \forall y.\, (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
2. $\mathbb{N} \models \forall x.\, \forall y.\, x + s(y) = s(x + y)$
3. $\mathbb{N} \models \forall x.\, \forall y.\, x \times s(y) = x + x \times y$

Aufgabe 2 - Fitch trifft Induktion

Die Axiome der Peano-Arithmetik (mit $+$ und $\times$) lauten

PA_1. $\forall x.\, \neg(0 = s(x))$

PA_2. $\forall x.\, \forall y.\, (s(x) = s(y)) \to (x = y)$

PA_3. $\forall x.\, x + 0 = x$

PA_4. $\forall x.\, \forall y.\, x + s(y) = s(x + y)$

PA_5. $\forall x.\, x \times 0 = 0$

PA_6. $\forall x.\, \forall y.\, x \times s(y) = x \times y + x$

PA_7. $$\forall y_1, \dots, y_n.\, (\phi(0, y_1, \dots, y_n) \wedge \forall x.\, (\phi(x, y_1, \dots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \dots, y_n)) \\ \to \forall x.\, \phi(x, y_1, \dots, y_n))$$

PA_7 ist ein Axiomenschema, das für jedes ϕ ein Axiom erzeugt, eine sogenannte Instanz. Diese Instanzen heißen erwartungsgemäß Induktionsaxiome.

Aufgabe 2 - Fitch trifft Induktion

- Beweisen Sie die folgende Modifikation von PA_3 in Fitch:
  PA'_3. $\forall x. 0 + x = x$.
- Formalisieren Sie Ihren Fitch-Beweis in Coq.

```
Require Import Classical.

Parameter Nat: Set.              (* Typ der natürlichen Zahlen *)

Parameters zero: Nat.
Parameters s: Nat -> Nat.

Parameters plus times: Nat -> Nat -> Nat.

Notation "A + B" := (plus A B).     (* Infixnotation für plus *)
Notation "A * B" := (times A B).    (* Infixnotation für times *)

Notation "0" := (zero).

Axiom PA1: forall x: Nat, ~(0 = s(x)).
Axiom PA2: forall x y: Nat, (s(x) = s(y)) -> (x=y).
Axiom PA3: forall x: Nat, x + 0 = x.
Axiom PA4: forall x y: Nat, x + s(y) = s(x+y).
Axiom PA5: forall x: Nat, x * 0 = 0.
Axiom PA6: forall x y, x * s(y) = x * y + x.
Axiom PA7: forall P: Nat -> Nat -> Prop, forall y:Nat,
             P 0 y /\ forall x: Nat, (P x y -> P (s x) y)
             -> forall x, P x y.

Lemma PA3': forall x:Nat, 0 + x = x.

  (* Ihren Beweis hier einfügen *)

Qed.
```