Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

January 15, 2016

Pränexe Normalform

Eine pränexe Normalform ist eine Formel der Form $Q_1 x_1. \dots Q_n x_n. \phi$ mit $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ und ϕ quantorenfrei.

Satz

Zu jeder Formel lässt sich durch Anwendung der Regeln

$$\begin{aligned} \neg\exists x.\,\phi &\equiv \forall x.\,\neg\phi & \qquad \neg\forall x.\,\phi &\equiv \exists x.\,\neg\phi \\ \phi \wedge \exists x.\,\psi &\equiv \exists x.\,(\phi \wedge \psi) & \qquad \phi \wedge \forall x.\,\psi &\equiv \forall x.\,(\phi \wedge \psi) \\ \phi \vee \exists x.\,\psi &\equiv \exists x.\,(\phi \vee \psi) & \qquad \phi \vee \forall x.\,\psi &\equiv \forall x.\,(\phi \vee \psi), \end{aligned}$$

eine äquivalente pränexe Normalform berechnen, wobei für die letzten beiden Zeilen $x \notin FV(\phi)$ vorausgesetzt wird; falls nötig, gebundene Variable umbenennen.

Skolemform

Eine Skolemform ist eine pränexe Normalform, die nur Allquantoren enthält. Formeln ϕ, ψ heißen erfüllbarkeitsäquivalent, wenn ϕ erfüllbar ist genau dann, wenn ψ erfüllbar ist.

Satz

Zu jeder pränexen Normalform lässt sich eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform durch wiederholte Anwendung der Umformung

$$\forall x_1. \dots \forall x_n. \exists y. \phi \rightsquigarrow \forall x_1. \dots \forall x_n. \phi[f(x_1, \dots, x_n)/y]$$

berechnen, mit jeweils einem frischen Funktionssymbol f. (Achtung: Regel nur auf ganze Formeln anwenden, nicht auf Teilformeln innerhalb größerer Formeln!)

Klauselform

Bringe Skolemform $Q_1 x_1 . \dots . Q_n x_n . \phi$ mit $Q_i = \forall$ für alle i wie folgt in Klauselform:

- Normalisiere ϕ zu CNF ψ;
- Entferne führende Allquantoren (implizite Allquantifizierung);
- Schreibe ψ als Menge von Klauseln.

Resolution (Prädikatenlogik)

Resolutionsregel mit impliziter Faktorisierung

$$(RIF)\frac{C_1, A_1, \ldots, A_n \qquad C_2, \neg B}{C_1\sigma, C_2\sigma} \qquad (\sigma = mgu(A_1, \ldots, A_n, B)),$$

wobei $mgu(A_1, \ldots, A_n, B) = mgu\{A_i \doteq B \mid i = 1, \ldots, n\}$.
Vor Anwendung der Regel Variablen in beiden Ausgangsklauseln so umbenennen, dass die Klauseln disjunkte Variablenmengen haben.

Beweise die Gültigkeit einer Formel ϕ wie folgt:

1. Bilde $\neg\phi$
2. Transformiere $\neg\phi$ in Klauselform
3. Wende (RIF) an, bis $\Box$ erreicht ist.

(Achtung: für ϕ nicht gültig terminiert der Algorithmus eventuell nicht.)

Aufgabe 1 - Trinkerparadoxon und Resolution

Beweisen Sie das Trinkerparadoxon

$$\exists x. \left(P(x) \rightarrow \forall y. P(y)\right)$$

mittels Resolution erster Stufe. Führen Sie dazu die folgenden Schritte durch:

1. Negieren Sie die Formel.
2. Bringen Sie die Formel in pränexe Normalform.
3. Bringen Sie die Formel in Skolemform.
4. Berechnen Sie die entsprechende Klauselform.
5. Wenden Sie das Resolutionsverfahren an.