Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

January 12, 2016

Aufgabe 1 - Variablensubstitution (Prädikatenlogik)

Eine Substitution ist eine Funktion, die Variablen auf Terme abbildet. Schreibweise: $[E_1/x_1, \ldots, E_n/x_n]$. Definiere für Formeln ϕ, Ausdrücke E und Substitionen σ das Ergebnis $\phi\sigma$ bzw. $E\sigma$ der Anwendung von σ rekursiv:

- $x\sigma = \sigma(x)$
- $f(E_1, \ldots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \ldots, E_n\sigma) \qquad f/n \in \Sigma$
- $(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$
- $(\neg\phi)\sigma = \neg(\phi\sigma)$
- $(\phi \wedge \psi)\sigma = (\phi\sigma \wedge \psi\sigma)$
- $(\forall x.\, \phi)\sigma = \forall y.\, \phi\sigma'$, wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ für jedes $z \neq x$, und $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x.\, \phi)$.

Geben Sie entsprechende Gleichungen für $(\phi \vee \psi)\sigma$ und $(\exists x.\, \phi)\sigma$ an, die sich aus der Kodierung von $\phi \vee \psi$ als $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ und von $\exists x.\, \phi$ als $\neg(\forall x.\, \neg\phi)$ ergeben.

Unifikation

Eine Gleichung $E \doteq D$ ist ein Paar (E, D) von Termen. Ein Gleichungssystem ist eine Menge von Gleichungen. Eine Substitution σ ist ein Unifikator von $E \doteq D$, wenn $E\sigma = D\sigma$. Ein Unifikator eines Gleichungssystems S ist eine Substitution, die Unifikator aller Gleichungen in S ist. Das System S ist unifizierbar, wenn es einen Unifikator hat. Eine Substitution σ_1 ist allgemeiner als σ_2, wenn eine Substitution τ existiert, so dass $\sigma_1\tau = \sigma_2$.
Ein Unifikator σ von S ist allgemeinster Unifikator (MGU, most general unifier) von S ($\sigma = mgu(S)$), wenn σ allgemeiner als jeder Unifikator von S ist.

Unifikationsalgorithmus

Der Algorithmus (ursprünglich Herbrand, später Martelli/Montanari) besteht in erschöpfender Anwendung der folgenden Umformungsregeln:

(*delete*) :

$$S \cup \{x \doteq x\} \quad \to S$$

(*decomp*) :

$$S \cup \{f(E_1, \ldots, E_n) \doteq f(D_1, \ldots, D_n)\} \quad \to S \cup \{E_1 \doteq D_1, \ldots, E_n \doteq D_n\}$$

(*conflict*) :

$$S \cup \{f(E_1, \ldots, E_n) \doteq g(D_1, \ldots, D_k)\} \quad \to \bot \qquad (\text{für } f \neq g)$$

(*orient*) :

$$S \cup \{E \doteq x\} \quad \to S \cup \{x \doteq E\} \qquad (E \text{ keine Variable})$$

(*occurs*)/(*elim*) :

$$S \cup \{x \doteq E\} \quad \to \begin{cases} \bot & (x \in FV(E), x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} & (x \notin FV(E), x \in FV(S)) \end{cases}$$

Wenn $\bot$ erreicht wird, gibt der Algorithmus "nicht unifizierbar" aus; ansonsten berechnet er einen allgemeinsten Unifikator von S.

Aufgabe 2 - Unifikation

Berechnen Sie mittels des Unifikationsalgorithmus einen allgemeinsten Unifikator für die folgenden formalen Gleichungen, bzw. zeigen Sie ggf., dass die Gleichungen nicht unifizierbar sind.

1. $\mathrm{plus}(\mathrm{plus}(x, \mathrm{o}), y) \doteq \mathrm{plus}(\mathrm{plus}(y, \mathrm{o}), \mathrm{plus}(\mathrm{o}, \mathrm{plus}(\mathrm{o}, \mathrm{plus}(z, \mathrm{o}))))$;
2. $\mathrm{branch}(x, \mathrm{branch}(\mathrm{end}, \mathrm{end})) \doteq \mathrm{branch}(\mathrm{branch}(z, y), \mathrm{branch}(x, \mathrm{end}))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationsalgorithmus.