Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

December 11, 2015

Prädikatenlogische Signatur

Sei V abzählbar unendliche Menge von Variablen. Signatur $\Sigma = (P_\Sigma, F_\Sigma)$:

- Menge P_Σ von Prädikatensymbolen,
- Menge F_Σ von Funktionssymbolen.

Schreibe $s/n \in \Sigma$ für n-stelliges $s \in P_\Sigma \cup F_\Sigma$. Funktionssymbol $c/0 \in \Sigma$ heißt Konstante; nullstellige Prädikatensymbole: aussagenlogische Atome.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Terme: $E ::= x \mid f(E_1, \dots, E_n)$
Formeln: $\phi ::= (E = D) \mid P(E_1, \dots, E_n) \mid \neg\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \forall x.\phi$

wobei $x \in V$, $f/n \in \Sigma$ und $P/n \in \Sigma$.

$\exists x.\phi := \neg\forall x.\neg\phi$, $\bot \equiv \neg\forall x.x = x$, $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$, etc.

Aufgabe 1 - Präordnungen

Präordnungen als Theorie erster Stufe (d.h. als ein Paar (Σ, Φ), bestehend aus einer Signatur Σ und einer Menge Φ von Σ-Formeln, den Axiomen der Theorie): Keine Funktionssymbole, ein binäres Prädikatensymbol $\sqsubseteq$ ($x \sqsubseteq y$: 'x kleiner oder gleich y') und die Axiome

- Reflexivität: $\forall x. x \sqsubseteq x$,
- Transitivität: $\forall x. \forall y. \forall z. x \sqsubseteq y \land y \sqsubseteq z \to x \sqsubseteq z$.

Elemente x und y vergleichbar, wenn $x \sqsubseteq y$ oder $y \sqsubseteq x$.

Formalisieren Sie die folgenden Begriffe in Logik erster Stufe.

- Totale Präordnung: Je zwei Elemente sind stets vergleichbar.
- (Partielle) Ordnung: Wenn ein Element kleiner oder gleich einem anderen ist, dann kann das Umgekehrte nicht gelten, es sei denn, beide sind gleich.
- Präordnung mit kleinstem Element: Es gibt ein Element, das kleiner oder gleich allen Elementen ist.

Natürliches Schliessen in Prädikatenlogik

$$(=I)\ \frac{}{E = E} \qquad (=E)\ \frac{\phi[E/x] \qquad E = D}{\phi[D/x]}$$

$$(\forall\mathrm{E})\ \frac{\forall x.\,\phi}{\phi[E/x]} \qquad (\forall\mathrm{I})\ \frac{\boxed{c} \vdash \phi[c/x]}{\forall x.\,\phi}$$

$$(\exists\mathrm{I})\ \frac{\phi[E/x]}{\exists x.\,\phi} \qquad (\exists\mathrm{E})\ \frac{\exists x.\phi \qquad \boxed{c}\ \ \phi[c/x] \vdash \psi}{\psi}$$

mit c frisch (d.h. c kommt nur in Unterbeweis vor, insbesondere bei $(\exists E)$ auch nicht in ψ).

Aufgabe 2 - Trinkerparadoxon in FOL

Das Trinkerparadoxon von Aufgabe 3, Übungsblatt 6 lässt sich in Logik erster Stufe formulieren.

1. Wie?
2. Beweisen Sie die betreffende Formel in Fitch.
3. Beweisen Sie die betreffende Formel in Coq.

Coq-Taktiken zu neuen Fitch-Regeln:

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$\forall I$	`intro x0.`
$\forall E$	`apply H.`
$\exists I$	`exists t.`
$\exists E$	`destruct H.`