Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

December 3, 2015

Negationsnormalform (NNF)

$$\phi, \psi ::= \bot \mid \top \mid A \mid \neg A \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \qquad (A \in \mathcal{A})$$

NNF ξ ist NNF von ϕ, wenn $\xi \equiv \phi$.

Satz

Jede Formel hat eine NNF $\mathrm{NNF}(\phi)$.

Rekursive Berechnung einer NNF

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NNF}(A) &= A \\
\mathrm{NNF}(\phi \land \psi) &= \mathrm{NNF}(\phi) \land \mathrm{NNF}(\psi) \\
\mathrm{NNF}(\phi \lor \psi) &= \mathrm{NNF}(\phi) \lor \mathrm{NNF}(\psi) \\
\mathrm{NNF}(\neg A) &= \neg A \\
\mathrm{NNF}(\neg\neg\phi) &= \mathrm{NNF}(\phi) \\
\mathrm{NNF}(\neg(\phi \land \psi)) &= \mathrm{NNF}(\neg\phi) \lor \mathrm{NNF}(\neg\psi) \\
\mathrm{NNF}(\neg(\phi \lor \psi)) &= \mathrm{NNF}(\neg\phi) \land \mathrm{NNF}(\neg\psi)
\end{aligned}
$$

Konjunktive Normalform (CNF)

Literale $L ::= A \mid \neg A \qquad (A \in \mathcal{A})$

Klauseln $C ::= \bot \mid neC$
$neC ::= L \mid L \vee neC$

CNFs $\phi ::= \top \mid \psi$
$\psi ::= C \mid C \wedge \psi$

Eine CNF hat also die allgemeine Form $\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{k} L_{ij})$.

Lemma

Jede Formel hat eine CNF $\mathrm{CNF}(\phi)$.

Rekursive Berechnung der konjunktiven Normalform

Sei ϕ bereits in NNF. Definiere CNF(ϕ) rekursiv:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CNF}(\phi \wedge \psi) &= \mathrm{CNF}(\phi) \wedge \mathrm{CNF}(\psi) \\
\mathrm{CNF}((\phi \wedge \psi) \vee \chi) &= \mathrm{CNF}(\phi \vee \chi) \wedge \mathrm{CNF}(\psi \vee \chi) \\
\mathrm{CNF}(\phi) &= \phi \qquad (\phi \text{ bereits CNF}).
\end{aligned}$$

Notation: $\square$ bezeichne die leere Klausel.

Aufgabe 1 - DNF: Do it Yourself

Konjunktion und Disjunktion sind zueinander dual in dem Sinne, dass

$$\phi \land \psi \equiv \neg(\neg\phi \lor \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \lor \psi \equiv \neg(\neg\phi \land \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale disjunktive Normalform (DNF), bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Achtung: Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Aufgabe 2 - NNF, CNF und DNF

Bilden Sie NNF, CNF und DNF für eine der folgenden aussagenlogischen Formeln:

1. $\neg(A \wedge B \wedge ((A \vee B) \rightarrow (B \wedge \neg C)))$;
2. $\neg((A \wedge B \wedge (C \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg(A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C)))$.

Achtung: Die Ergebnisse sollen gemäß der Umformungsregeln bzw. der rekursiven Definitionen aus der Vorlesung bzw. aus der obigen Aufgabe berechnet werden. Die bloße Angabe einer richtigen Antwort gilt nicht als Lösung. Im Laufe der Rechnung können dabei Formeln mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$ sowie **ausschließlich** der folgenden weiteren Gesetze vereinfacht bzw. umgeformt werden: $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$, $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$.

Resolution (Aussagenlogik)

Resolutionsregel

$$(\mathrm{Res})\ \frac{C_1 \cup \{A\} \qquad C_2 \cup \{\neg A\}}{C_1 \cup C_2}$$

Algorithmus: Resolutionsverfahren

Eingabe: CNF ϕ. Ausgabe: "ja", wenn ϕ erfüllbar, "nein" sonst.
Verwende ϕ als globale Variable:

1. If $\square \in \phi$ return "nein".
2. Suche $C_1 \cup \{A\}, C_2 \cup \{\neg A\} \in \phi$, $C_1 \cup C_2 \notin \phi$. Falls keine solchen C_1, C_2 existieren, return "ja".
3. $\phi := \phi \cup \{C_1 \cup C_2\}$, gehe zu Schritt 1.

Aufgabe 3 - Resolution

Betrachten Sie erneut das Beispiel aus der Vorlesung:

$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\},$$
$$\{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}$$

Konstruieren Sie einen Resolutionsbeweis der Unerfüllbarkeit der gegebenen Klauselmenge. Organisieren Sie den Beweis in Form eines gerichteten Graphen, mit Klauseln als Knoten und gerichteten Kanten, die Klauseln mit ihren Resolventen verbinden.