

Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115

Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen

Department Informatik

Lehrstuhl 8

November 18, 2015

Beweis-Regeln des Fitch-Kalküls (Konjunktion, Negation, Falsum)

Notation: Wir schreiben $\Phi \vdash \varphi$, wenn φ per Regeln aus Annahmen in Φ (Φ Menge von Formeln) rein syntaktisch herleitbar ist.

$$(\wedge I) \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \quad (\wedge E_1) \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad (\wedge E_2) \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$(\neg I) \frac{\varphi \vdash \perp}{\neg \varphi} \quad (\neg E) \frac{\neg \neg \varphi}{\varphi}$$

$$(\perp I) \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} \quad (\perp E) \frac{\perp}{\varphi}$$

Beweis-Regeln des Fitch-Kalküls (Disjunktion, Implikation)

$$\begin{array}{l}
 (\vee I_1) \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad (\vee I_2) \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \quad (\vee E) \frac{\varphi \vdash \chi \quad \psi \vdash \chi}{\chi} \quad \varphi \vee \psi \\
 (\rightarrow E) \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \quad (\rightarrow I) \frac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \rightarrow \psi}
 \end{array}$$

Satz (Korrektheit und Vollständigkeit des Fitch-Kalküls)

Für alle Mengen von Formeln Φ und alle Formeln ϕ ,

$$\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash \psi.$$

Aufgabe 1 - Beweise in Fitch

Beweisen Sie folgende aussagenlogische Formeln im Fitch-Kalkül:

- 1 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 2 $(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 3 $(A \wedge (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

Aufgabe 2 - Beweise in Coq

Wir betrachten den folgenden Beweis von $(q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$:

```

1  Require Import Classical_Prop.          (** Lemmas für klassische Logik *)
2
3  Parameters p q : Prop.                 (** Deklaration aussagenlogischer
4                                         Variablen p und q *)
5  Theorem T1 : (q->p)->(~p->~q).          (** T1 ist der Name des Theorems *)
6  Proof.                                  (** Anfang des Beweises **)
7  intro A.
8  intro B.
9  intro C.
10 assert p as D.
11 apply A; exact C.
12 apply B; exact D.
13 Qed.                                    (** Ende des Beweises **)

```

Die Namen A , B und C werden als Bezeichnungen für die Zwischenschritte verwendet; `intro`, `apply`, `assert` und `exact` sind Taktiken, ähnlich zu Fitch-Regeln.

Aufgabe 2 - Beweise in Coq

- Lesen Sie das Coq-Cheat-Sheet von Andrej Bauer, und identifizieren Sie die Einführungs- und Eliminations-Regeln des Fitch-Kalküls als Coq-Taktiken (bzw. einfache Kombinationen davon) wie im Kapitel "Basic Tactics" beschrieben.
- Formalisieren Sie die Beweise aus Aufgabe 1 in Coq.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$\wedge I$	split
$\wedge E_1$	destruct H as [H0 _]; exact H0.
$\wedge E_2$	destruct H as [_ H0]; exact H0.
$\vee I_1$	left; exact H.
$\vee I_2$	right; exact H.
$\vee E$	destruct H as [L R]; apply H0; exact L; apply H1; exact L.
$\rightarrow I$	intro
$\rightarrow E$	apply H; exact H0.
$\neg I$	intro
$\neg E$	apply NNPP.
$\perp I$	apply H; exact H0.
$\perp E$	contradiction.