Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

November 6, 2015

Wiederholung aus der Vorlesung

Aussagenlogik - Syntax

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge aussagenlogischer Atome.

$$\psi, \varphi ::= \bot \mid A \mid \psi \wedge \varphi \mid \neg\varphi \qquad A \in \mathcal{A}$$

$$\top = \neg\bot \qquad \varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi \qquad \varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Aussagenlogik - Semantik

Sei $\kappa : \mathcal{A} \to \{\top, \bot\}$ Wahrheitsbelegung. Definiere:

$$\begin{aligned}
&\kappa \not\models \bot \\
&\kappa \models A && \Leftrightarrow \kappa(A) = \top \\
&\kappa \models \psi \wedge \varphi && \Leftrightarrow \kappa \models \psi \text{ und } \kappa \models \varphi \\
&\kappa \models \neg\psi && \Leftrightarrow \kappa \not\models \psi
\end{aligned}$$

Wiederholung aus der Vorlesung

Φ Menge von Formeln; $\kappa \models \Phi$ g.d.w. $\forall \varphi \in \Phi . \kappa \models \varphi$.

Konsequenz

φ ist logische Konsequenz von Φ ($\Phi \models \varphi$) g.d.w. $\forall \kappa . \kappa \models \Phi \Rightarrow \kappa \models \varphi$.

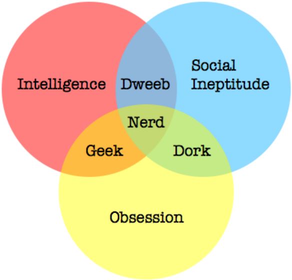
Gültigkeit / Erfüllbarkeit

φ ist gültig (tautologisch) g.d.w. $\emptyset \models \varphi$ g.d.w. $\forall \kappa . \kappa \models \varphi$.
Φ ist erfüllbar g.d.w. $\exists \kappa . \kappa \models \Phi$.

Logische Äquivalenz

φ und ψ sind logisch äquivalent ($\varphi \equiv \psi$) g.d.w. $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Aufgabe 1 - Mengendiagramme



- Welche der folgenden Formeln sind unter allen Wahrheitsbelegungen κ, die sich im Diagramm wiederfinden, erfüllt?

  $(G \wedge Dw) \rightarrow Do$

  $(G \vee SI) \rightarrow (\neg O \wedge Dw)$

  $I \rightarrow ((Dw \wedge G) \vee \neg Do)$

- Welche dieser Formeln sind gültig?

- Finden Sie je eine Wahrheitsbelegung κ im Diagramm, die die folgenden Formeln erfüllt bzw. nicht erfüllt.

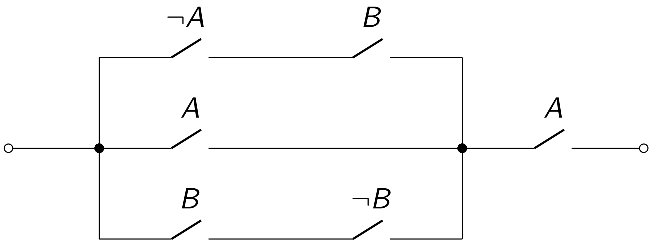
  $Dw \vee G \vee Do$

  $I \vee SI \vee O$

  $(I \wedge O) \vee (\neg Do \wedge Dw) \vee (\neg Dw \wedge Do)$

Aufgabe 2 - Schaltkreise und Induktion

Wir betrachten im folgenden Schaltkreise, die aus mit Kabeln verbundenen Schaltern bestehen. Schalter sind dabei mit (negierten) Buchstaben (z.B. A, $\neg A$) markiert. Beispielsweise entspricht



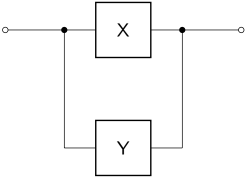
der Formel $((\neg A \wedge B) \vee A \vee (B \wedge \neg B)) \wedge A$.

Aufgabe 2 - Schaltkreise und Induktion

Induktive Konstruktion von Schaltkreisen:

- Ein Schalter ist ein Schaltkreis.
- Seien X und Y Schaltkreise; dann sind sequentielle und parallele Komposition von X und Y, definiert durch die Schaltdiagramme

und



(1)

ebenfalls Schaltkreise.

Aufgabe 2 - Schaltkreise und Induktion

Damit erhält man folgendes Induktionsprinzip:

Induktionsprinzip für Schaltkreise

Eine Eigenschaft P gilt dann für alle Schaltkreise, wenn sie für alle einzelnen Schalter gilt (**IA**) und, wenn sie für Schaltkreise X und Y gilt (**IV**), dann stets auch für die beiden Schaltkreise in Diagramm (1) gilt (**IS**).

Geben Sie ein Verfahren an, das aus einem Schaltkreis Z einen Schaltkreis Z' konstruiert, so dass genau dann Strom durch Z fließt, wenn kein Strom durch Z' fließt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion mittels des obigen Induktionsprinzips.