Übungen zu "Grundlagen der Logik in der Informatik" - WS15/16

Donnerstag 14:15-15:45, Cauerstraße 7/9, Raum 0.154-115
Freitag 14:15-15:45, Martenstr. 3, Raum 02.134-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

October 29, 2015

Übungsabgabe

- Zu entsprechend gekennzeichneten Übungsaufgaben können Lösungen eingereicht werden
- Bearbeitungszeit: 1 Woche pro Übungsblatt
- Abgabe freiwillig, in Gruppen von 2-3 Studierenden
- Abgabe in der auf dem Übungsblatt angegebenen Übungstunde (oder bis Beginn der Übungsstunde per Mail an den/die Tutor/in)
- Autoren der Lösungen angeben, Tutor und Übungsstunde angeben

Bonuspunkte

- Punkte für abgegebene Lösungen zählen als Bonuspunkte für Klausur (Verbesserung der Note, falls bestanden)
- Um Bonus zu erhalten: Vorrechnen der Lösung einer Aufgabe in der Übungsstunde
- Details zu Gesamtanzahl und Wichtung der Punkte werden noch bekanntgegeben

Übungsablauf

- Primär: Besprechung von Übungsaufgaben ("Präsenzaufgaben"), u.a. als Vorbereitung auf die Hausaufgaben
- Wiederholung zentraler Konzepte aus der Vorlesung
- Beantwortung von Fragen zur Vorlesung, Aufgabestellungen etc.
- Besprechung von alten (Haus)Aufgaben (Vorrechnen)

Wiederholung aus der Vorlesung

Vollständige Induktion

Beweise

$$\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$$

mittels vollständiger Induktion über n:

- Induktionsanfang (**IA**): Zeige $P(0)$,
- Induktionsschritt (**IS**): Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $P(n+1)$ aus der Induktionsvoraussetzung (**IV**) $P(n)$ folgt.

Wiederholung aus der Vorlesung

Course-of-Values-Induktion

Beweise

$$\forall n \in \mathbb{N}. P(n)$$

per Course-of-Values-Induktion über n:

> Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $P(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung (**IV**) $\forall k < n. P(k)$ folgt.

Aufgabe 4 - Induktion

Beweisen Sie folgende Behauptung durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

> Sei x eine reelle Zahl, so dass $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist. Dann ist $x^n + \frac{1}{x^n}$ auch eine ganze Zahl.

Aufgabe 6 - Verstärkung im Induktionsbeweis

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2,$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: Man erfinde eine geeignete Funktion f über den positiven reellen Zahlen, so dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - f(n).$$

Aufgabe 7 - Fehlerhafte Induktion

Was ist bei den folgenden Induktionsbeweisen falsch gelaufen?

Jeder Bus kann beliebig viele Studierende fassen.
Wir beweisen per Induktion über n, dass n Studierende in den Bus passen.

Induktionsanfang $n = 1$:
Der Bus ist natürlich gross genug, um eine Person zu fassen.

Induktionsschritt $n - 1 \to n$:
Wenn schon $n - 1$ Studierende im Bus sind, dann weiß jeder, dass immer noch ein Studierender hineinpasst.

Aufgabe 7 - Fehlerhafte Induktion

Was ist bei den folgenden Induktionsbeweisen falsch gelaufen?

Alle Schafe einer Herde haben die gleiche Farbe.
Beweis per Induktion über die Größe n der Herde:

Induktionsanfang $n = 1$: klar.

Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Wir betrachten eine Herde von n Schafen. Wenn wir ein Schaf herausnehmen, bleibt eine Herde von $n - 1$ Schafen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben, übrig. Jetzt fügen wir das herausgenommene Schaf wieder hinzu und nehmen ein anderes Schaf heraus; auch hier haben die übriggebliebenen $n - 1$ Schafe nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Also haben alle n Schafe der Herde die gleiche Farbe.

Aufgabe 3 - Popeye der Seemann

Popeye hat 5 Dosen Spinat. Er weiß, dass genau zwei davon von seinem Gegner Bluto ausgetauscht worden sind. Er weiß auch, dass eine von den falschen Dosen genau 1 g leichter und eine genau 1 g schwerer ist als die richtigen. Kann Popeye mit einer Schalenwaage die echten Spinatdosen von den gefälschten trennen und auch genau sagen, welche leichter und welche schwerer ist?

Er hat allerdings nur genug Kraft für drei Wägungen.