Ontologien im Semantic Web WS 2013/14

Übungsblatt 4

Abgabe: 19.12.2013

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe die Namen aller Beteiligten.

Aufgabe 1 Anwendungen des Tableaukalküls (5 Punkte)

Verwenden Sie den Tableaukalkül, um folgende Formeln auf Erfüllbarkeit zu prüfen:

$$\Box(p \to (\Diamond q \vee \Diamond r)) \wedge \Diamond p \wedge \Diamond q \wedge \Box\Box((q \vee r) \to p) \wedge \Box(q \to \Box\neg p)$$
$$\Box(p \to (\Diamond q \vee \Diamond r)) \wedge (\Diamond p \vee \Diamond\neg p) \wedge \Box(\neg p \to \Box\neg p) \wedge \Box\Box(p \wedge \neg r)$$

Aufgabe 2 Große Modelle (5 Punkte)

Gegeben seien Atome $q_1, q_2, \ldots$. Man definiere die Familie von Formeln ϕ_n durch

$$\phi_n = \bigwedge_{i=0}^{n} \Box^i(\Diamond q_{i+1} \wedge \Diamond\neg q_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \Box^i(\Box^{\leq n-i}((q_i \to \Box q_i) \wedge (\neg q_i \to \Box\neg q_i))).$$

Zeigen Sie, dass jedes Modell von ϕ_n mindestens 2^n Elemente hat. Geben Sie eine polynomielle Abschätzung für die Größe von ϕ_n in Abhängigkeit von n an.

Aufgabe 3 Keine großen Modelle (5 Punkte)

Aus der vorigen Aufgabe folgt, dass die Modallogik K *aller* Kripkerahmen *nicht* die sogenannte *polynomielle Modelleigenschaft* hat, d.h. es existiert kein Polynom p, so dass jede erfüllbare Formel ϕ ein Modell mit höchstens $p(|\phi|)$ Zuständen hat, wobei $|\phi|$ die syntaktische Größe von ϕ bezeichnet. S5 bezeichnet die Modallogik der transitiven, reflexiven und symmetrisch Kripkerahmen (deren Zustandsübergangsrelation also eine Äquivalenzrelation ist). Zeigen Sie, dass die Methode von Aufgabe 2 zur Widerlegung der polynomiellen Modelleigenschaft für S5 nicht anwendbar ist, weil die Formeln ϕ_n in solchen Rahmen nicht erfüllbar sind.

Aufgabe 4 Universelle Modelle (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede S5-erfüllbare Formel über einem *universellen* Kripkerahmen erfüllbar ist, d.h. einem Rahmen der Form (X, R) mit $R = X \times X$.