Übungsblatt 10

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 27.01-31.01

Natürliche Zahlen als Modellen erster Stufe (Präsenzaufgabe)

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Stellen Sie $\mathbb{N}$ als ein Modell einer Signatur dar, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- eine Individuenkonstante 0,
- ein Funktionssymbol s für die Nachfolgeroperation, z.B. $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, etc.,
- zwei binäre Funktionssymbole $+$ und $\times$ für Addition und Multiplikation.

Drücken Sie die folgenden Sätze als Formeln erster Stufe aus:

1. X ist kleiner oder gleich Y (Achtung: $\leq$ gehört nicht zur Signatur);
2. 0 ist die kleinste Zahl;
3. X ist ein Teiler von Y;
4. X ist eine Dreieckszahl (d.h. X ist ein Binomialkoeffizient der Form $\binom{Y+1}{2}$ für geeignetes Y).

Überprüfen Sie dann die folgende Sätze der *Peano-Arithmetik*:

1. $\mathbb{N} \models \forall X. (s(X) = s(Y) \rightarrow X = Y)$;
2. $\mathbb{N} \models \forall X. \forall Y. X + s(Y) = s(X + Y)$;
3. $\mathbb{N} \models \forall X. \forall Y. X \times s(Y) = X + X \times Y$.

Aufgabe 1 Ausdrücke über ganzen Zahlen (6 Punkte)

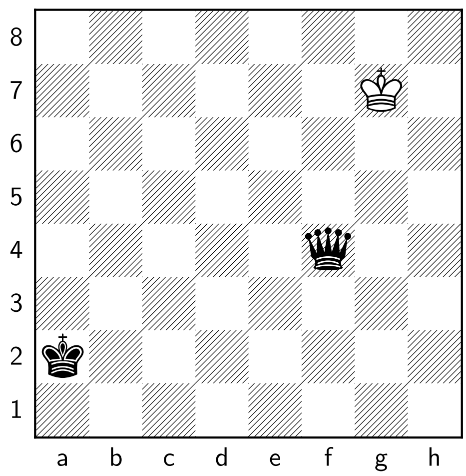
Gegeben seien eine Signatur Σ, die aus einen binären Funktionssymbol f sowie drei Konstanten a, b und c besteht, und ein Σ-Modell $\mathfrak{M}$ mit der Menge der ganzen Zahlen als Trägermenge (also $M = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$). Sei E ein abgeschlossener Ausdruck (also $FV(E) = \emptyset$) über Σ. Beweisen Sie, dass

1. wenn $\mathfrak{M}[\![f]\!](x, y) = x + y$, $\mathfrak{M}[\![a]\!] = \mathfrak{M}[\![b]\!] = 0$ und $\mathfrak{M}[\![c]\!] = 1$, dann $\mathfrak{M}[\![E]\!]$ gleich der Anzahl Vorkommen von c in E ist;
2. wenn $\mathfrak{M}[\![f]\!](x, y) = x + y$, $\mathfrak{M}[\![a]\!] = 0$, $\mathfrak{M}[\![b]\!] = 1$ und $\mathfrak{M}[\![c]\!] = -1$, dann $\mathfrak{M}[\![E]\!] = 0$ g.d.w. b und c in E gleich oft vorkommen;
3. wenn $\mathfrak{M}[\![f]\!](x, y) = x * y$, $\mathfrak{M}[\![a]\!] = 0$, $\mathfrak{M}[\![b]\!] = 3$ und $\mathfrak{M}[\![c]\!] = 42$, dann $\mathfrak{M}[\![E]\!] = 0$ g.d.w. a in E vorkommt.

Hinweis: Induktion über die Struktur von E mit ggf. verstärkter Induktionsaussage.

Aufgabe 2 Schachbrett als Modell erster Stufe (8 Punkte)

Formalisieren Sie die folgende Schachsituation als ein Modell $\mathfrak{M}$ für die Signatur, die folgende Symbole umfasst: drei Individuenkonstanten $\mathsf{wKoenig}$, $\mathsf{sKoenig}$ und sDame; vier binäre Prädikate $\mathsf{linksVon}$, $\mathsf{rechtsVon}$, hinter, vor; und ein ternäres Prädikat $\mathsf{zwischen}$.



Die Semantik der Prädikate soll durch die jeweils offensichtliche geometrische Beziehung gegeben sein. Stellen Sie sicher, dass die Uneindeutigkeit in der Argumentfolge der Prädikate so aufgelöst ist, dass $\mathfrak{M}$ die folgenden Formeln erfüllt: $\mathsf{vor}(\mathsf{wKoenig}, \mathsf{sKoenig})$, $\mathsf{rechtsVon}(\mathsf{wKoenig}, \mathsf{sKoenig})$, $\mathsf{zwischen}(\mathsf{sDame}, \mathsf{sKoenig}, \mathsf{wKoenig})$.

Überprüfen Sie die folgende Behauptungen:

1. $\mathfrak{M} \models \exists X. (\mathsf{linksVon}(X, \mathsf{sDame}) \land \mathsf{vor}(X, \mathsf{wKoenig}))$;
2. $\mathfrak{M} \models \exists X. \exists Y. (\mathsf{linksVon}(X, Y) \land \exists Z. \mathsf{hinter}(Z, Y))$;
3. $\mathfrak{M} \models \exists X. \forall Y. \forall Z. (\neg(Y = Z) \to \mathsf{zwischen}(X, Y, Z))$.

Aufgabe 3 Fitch mit Quantoren (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Formeln in Fitch-Kalkül mit Quantoren:

1. $(\forall X. p(X, c)) \to (\exists X. p(X, c))$;
2. $(\exists Y. p(X) \land \exists Y. q(X, Y)) \to \exists Y. (p(X) \land q(X, Y))$.