

Übungsblatt 9

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 20.01-24.01

Beweis durch Fallunterscheidung

(Präsenzaufgabe)

Beweis durch Fallunterscheidung ist eine Beweisstrategie, die man zusammenfassend wie folgt beschreiben kann: Um einen Satz ϕ zu beweisen, reicht es aus, ein ψ zu finden, so dass sowohl ψ als auch $\neg\psi$ (jeweils für sich genommen natürlich) ϕ implizieren. Zeigen Sie, dass der Beweis durch Fallunterscheidung ein gültiges Prinzip des Fitch-Kalküls ist.

Freie Variablen

(Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie für die folgenden Formeln die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

1. $(\forall X. (\mathbf{p}(X) \wedge \mathbf{p}(Y))) \wedge \mathbf{q}(X)$;
2. $(\forall X. (\mathbf{p}(X) \wedge \exists X. \mathbf{p}(Y))) \wedge \exists Y. \mathbf{q}(X)$.

Aufgabe 1 Beweis in Fitch II

(6 Punkte)

Beweisen Sie folgende aussagenlogische Formeln im Fitch-Kalkül. Sie dürfen dabei die in der Präsenzaufgabe eingeführte Fitch-Regel für Beweise durch Fallunterscheidung mitverwenden.

1. $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B$;
2. $A \vee \neg A$; *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten)*
3. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. *(Peircesches Gesetz)*

Aufgabe 2 Familienverhältnisse in Prolog

(7 Punkte)

Kodieren Sie die folgenden Familienverhältnisse in Prolog: Anna ist die Mutter von Sebastian, Benjamin ist der Vater von Tanja und Uli, Anna und Benjamin sind Ehepartner. Manuela ist die Mutter von Benjamin. Nils ist der Vater von Anna.

- Programmieren Sie ein Prädikat $verheiratet(X, Y)$, welche ermittelt, ob die Personen X und Y verheiratet sind.
- Programmieren Sie ein Prädikat $kind(X, Y)$, welches ermittelt, ob X ein Kind von Y ist*.

*Es ist dabei anzunehmen, dass alle Kinder eines Ehepartners auch die des anderen Ehepartners sind.

- Programmieren Sie ein Prädikat $weiblich(X)$, welches versucht, aus der gegebenen Datenbasis zu ermitteln, ob die angegebene Person weiblich ist. Wie ist eine erfolglose Anfrage zu interpretieren? Warum?
- Programmieren Sie ein Prädikat $geschwister(X, Y)$, welches ermittelt, ob zwei Personen Geschwister sind.

Aufgabe 3 Freie Variablen

(3 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Formeln die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

1. $(\forall X. \neg(p(X) \rightarrow \exists X. p(X))) \rightarrow \forall Y. q(X)$;
2. $(p(X) \rightarrow r) \vee \exists X. \exists X. (p(X) \vee \forall Y. s(Y, Z))$;
3. $(p(X) \rightarrow r) \vee \exists X. \exists Y. (p(X) \vee \forall Y. s(Y, Z))$.

Aufgabe 4 Sprichwörter

(4 Punkte)

Übersetzen Sie folgende Sprichwörter in die Sprache der Logik erster Stufe:

1. Es gibt zwei Welten: die eine zürnt, die andre achtet nicht drauf.
2. Wem Gott gibt ein Amt, dem gibt er auch Verstand.
3. Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
4. Für jeden Topf gibt es einen passenden Deckel.

Beispiel: “Wer zuerst kommt, mahlt zuerst” wird in

$$\forall X. ((\forall Y. \text{kommtVor}(X, Y)) \rightarrow (\forall Y. \text{mahltVor}(X, Y)))$$

übersetzt.