

Übungsblatt 8

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 13.01-17.01

Beweis in Fitch

(Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende aussagenlogische Formeln im Fitch-Kalkül:

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$;
2. $(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
3. $(A \wedge (B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (A \wedge \neg B)$.

Fitch mit Disjunktion

(Präsenzaufgabe)

Disjunktion ist bekanntermaßen durch Konjunktion und Negation definiert. Formeln, die Disjunktionen enthalten, kann man dementsprechend in zwei Schritten beweisen: zunächst \vee durch \wedge und \neg ersetzen, danach den Fitch-Kalkül verwenden. Das gleiche gilt auch für Implikation. Zusätzlich zu den in der Vorlesung eingeführten Regeln für Implikation führen wir nun auch die Disjunktionsregeln

$$\frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I_1)$$

$$\frac{B}{A \vee B} \quad (\vee I_2)$$

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{|l} B \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \quad A \vee B \quad (\vee E)$$

ein. Leiten Sie die neuen Regeln her.

Aufgabe 1 Plus-Minus-Kalkül

(7 Punkte)

Gegeben sei der Plus-Minus-Kalkül:

$$\frac{}{-} \quad (-I) \quad \frac{- - X}{X+} \quad (-E) \quad \frac{X}{-X+} \quad (+-I) \quad \frac{X+ \quad -Y}{XY} \quad (+-E)$$

Dabei beziehen sich X und Y auf **nichtleere** Zeichenketten, die aus $+$ und $-$ bestehen.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Zeichenketten im Plus-Minus-Kalkül herleitbar sind.

- (a) ++
- (b) + - - +
- (c) + - + - +

2. Zeigen Sie, dass die Regeln

$$\frac{-X \quad -Y}{X + Y} \qquad \frac{-X}{XX}$$

im Plus-Minus-Kalkül herleitbar sind.

3. Die Zeichenkette ‘--’ ist im Plus-Minus-Kalkül nicht herleitbar. Warum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 Lückenhafte Beweislage (6 Punkte)

Vervollständigen Sie folgende Fitch-Beweise, indem Sie die fehlenden Formeln sowie die dazugehörigen Regelanwendungen angeben.

$$\begin{array}{|l} A \vee B \\ A \vee C \\ \hline \begin{array}{|l} A \\ \hline B \\ \hline \begin{array}{|l} A \\ \hline A \vee (B \wedge C) \end{array} \\ \hline A \vee (B \wedge C) \end{array} \end{array} \quad \vee I$$

a)

$$\begin{array}{|l} \neg(A \wedge B) \\ \hline \begin{array}{|l} \neg A \\ \hline B \end{array} \\ \hline \neg\neg(\neg A \vee \neg B) \\ \neg A \vee \neg B \end{array} \quad \begin{array}{l} \neg E \\ \\ \neg I \\ \neg E \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{|l} \neg C \\ \hline \neg(A \vee ((A \vee C) \rightarrow B)) \\ \hline \begin{array}{|l} A \vee C \\ \hline \begin{array}{|l} A \\ \hline C \end{array} \\ \hline B \end{array} \\ \hline \perp \\ \neg\neg(A \vee ((A \vee C) \rightarrow B)) \\ A \vee ((A \vee C) \rightarrow B) \end{array} \quad \vee E$$

c)

Achtung! Annotieren Sie Ihre Beweise zeilenweise mit der jeweils angewendeten Regelinstanz wie in der Vorlesung.

Aufgabe 3 Fitch mit Disjunktion (7 Punkte)

1. Beweisen Sie folgende aussagenlogische Formeln im Fitch-Kalkül **mit** Ersetzung von \rightarrow und \vee durch \wedge und \neg :

- (a) $A \vee \neg \perp$;
- (b) $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$;
- (c) $A \rightarrow (A \vee B)$.

2. Beweisen Sie auf die gleiche Art dieselben Formeln, aber nun **ohne** Ersetzen von \rightarrow und \vee durch \wedge und \neg .

Achtung! Annotieren Sie Ihre Beweise zeilenweise mit der jeweils angewendeten Regelinstanz wie in der Vorlesung.