Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 9.12-12.12

Aufgabe 1 Substitution (Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie folgende Substitutionen anhand der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

1. $\mathsf{comma}(\mathsf{comma}(X,Y),\mathsf{comma}(X,Z))[X \mapsto \mathsf{good}, Y \mapsto \mathsf{bad}, Z \mapsto \mathsf{ugly}]$;
2. $\mathsf{plus}(\mathsf{minus}(X),\mathsf{plus}(Z,Y))[X \mapsto \mathsf{plus}(X,\mathsf{zero}), Z \mapsto X, Y \mapsto \mathsf{succ}(\mathsf{zero})]$;
3. $\mathsf{link2}(X,\mathsf{link2}(Y,\mathsf{link2}(Y,Z)))[X \mapsto Y, Z \mapsto \mathsf{link2}(Y,Z), Y \mapsto X]$.

Aufgabe 2 Unifikation (Präsenzaufgabe)

Verwenden Sie den Unifikationalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

1. $\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(X,\mathsf{o}),Y) \doteq \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(Y,\mathsf{o}),\mathsf{plus}(\mathsf{o},\mathsf{plus}(\mathsf{o},\mathsf{plus}(Z,\mathsf{o}))))$;
2. $\mathsf{comma}(\mathsf{comma}(X,Y),\mathsf{comma}(Y,X)) \doteq \mathsf{comma}(\mathsf{comma}(Y,X),Z)$;
3. $\mathsf{link2}(\mathsf{link3}(\mathsf{a},Y,\mathsf{link3}(\mathsf{a},\mathsf{b},Z)),X) \doteq \mathsf{link2}(X,\mathsf{link3}(\mathsf{a},Y,Y))$;
4. $\mathsf{branch}(X,\mathsf{branch}(\mathsf{end},\mathsf{end})) \doteq \mathsf{branch}(\mathsf{branch}(Z,Y),\mathsf{branch}(X,\mathsf{end}))$.

(Beachten Sie, dass klein geschriebene Bezeichner Funktionen, ggf. Konstanten, sind, und groß geschriebene Bezeichner Variablen.) Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Aufgabe 3 Substitution vertieft I (6 Punkte)

Gegeben seien eine Substitution σ und ein Term E. Beweisen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$Vars(E\sigma) = \bigcup_{X \in Vars(E)} Vars(\sigma(X)).$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über die Struktur von E.

Aufgabe 4 Substitution vertieft II (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften von Substitutionen:

1. $[]\theta = \theta[] = \theta$,
2. $(\theta\sigma)\gamma = \theta(\sigma\gamma)$,

wobei θ, σ und γ Substitutionen sind und $[]$ die *leere Substitution* bezeichnet.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass eine Substitution eine Funktion ist und zwei Funktionen genau dann gleich sind wenn ihre Ausgaben für alle Eingabewerte übereinstimmen. Um Punkt 2 zu zeigen, kann man als erstes beweisen, dass für jeden Term E gilt: $E(\theta\sigma) = (E\theta)\sigma$. (Das stand in der Vorlesung an der Tafel, wurde aber bisher nicht formal bewiesen.) Man verwende hierzu Induktion über E.

Aufgabe 5 Unifikation (8 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

1. $\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(X, Z), Y) \doteq \mathsf{plus}(Y, \mathsf{plus}(\mathsf{o}, \mathsf{plus}(\mathsf{o}, Z)))$;
2. $\mathsf{comma}(X, \mathsf{comma}(Y, Z)) \doteq \mathsf{comma}(\mathsf{comma}(Y, X), Z)$;
3. $\mathsf{link2}(\mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, Z), X) \doteq \mathsf{link2}(X, \mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, Y))$;
4. $\mathsf{branch}(Y, \mathsf{branch}(Y, \mathsf{branch}(X, Y))) \doteq \mathsf{branch}(\mathsf{branch}(Z, Y), \mathsf{branch}(Z, \mathsf{end}))$.

(Beachten Sie, dass klein geschriebene Bezeichner Funktionen, ggf. Konstanten, sind, und groß geschriebene Bezeichner Variablen.) Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert jeweils, wenn man den sogenannten *Occurs Check* aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $X \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $X \in \mathit{Vars}(E)$?

Bonusaufgabe (2 Punkte)

Eine Substutution σ heiß *idempotent*, wenn $\sigma\sigma = \sigma$. Beweisen Sie, dass σ idempotent ist g.d.w. $\mathit{Dom}(\sigma) \cap \mathit{Ran}(\sigma) = \emptyset$, wobei $\mathit{Ran}(\sigma) = \bigcup_{X \in \mathit{Dom}(\sigma)} \mathit{Vars}(\sigma(X))$. (Achtung: im Skript wird $\mathit{Vars}(\sigma)$ definiert als $\bigcup_{X \in V} \mathit{Vars}(\sigma(X))$; i.a. ist $\mathit{Ran}(\sigma) \neq \mathit{Vars}(\sigma)$!)