Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 25.11-29.11

Aufgabe 1 Logische Wahrheit parametrisiert (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ die folgende aussagenlogische Formel gültig ist:

$$\phi_n = \big(A_1 \to (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\big) \vee \big(A_2 \to (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\big) \vee \ldots \vee \big(A_n \to (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\big).$$

Hinweis: Es gibt mehrere Möglichkeiten die Behauptung zu beweisen. Um die Aufgabe per Induktion über n zu beweisen nützlich ist das Prinzip der *Verstärkung des Induktionsziels*: man beweise die Aussage für beliebige Formeln ψ_i anstelle der Atome A_i.

Aufgabe 2 Logische Folgerung (Präsenzaufgabe)

Überprüfen Sie folgende Aussagen mittels Wahrheitstafeln:

- $A \to B \models (\neg B \to \neg A)$;
- $A \wedge (B \vee \neg A) \models A \to B$;
- $A \vee \neg A \models (\neg B \to \neg A)$.

Aufgabe 3 Dame oder Tiger, aussagenlogisch (8 Punkte)

Formalisieren Sie die Daten von der „Dame-oder-Tiger“-Aufgabe von Übungsblatt 0 in Aussagenlogik. Prüfen Sie dann, ob die Aussagen „Eine Dame ist in Raum I“ bzw. „Eine Dame ist in Raum II“ logische Folgerungen aus diesen Daten sind, indem Sie dementsprechende Wahrheitstabellen bilden.

Aufgabe 4 DNF: Do it Yourself (6 Punkte)

Eine Grundeigenschaft der Aussagenlogik ist die *Dualität*: Konjunktion und Disjunktion sind zueinander *dual* in dem Sinne, dass

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale *disjunktive Normalform (DNF)*, bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Aufgabe 5 NNF, CNF und DNF (6 Punkte)

Bilden Sie NNF, CNF und DNF für die folgenden aussagenlogischen Formeln:

1. $\neg(A \wedge B \wedge ((A \vee B) \rightarrow (B \wedge \neg C)))$;
2. $\neg(\neg A \vee B) \wedge (A \rightarrow \neg(A \rightarrow (B \vee C)))$.
3. $\neg((A \wedge B \wedge (C \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B \wedge \neg C))$.

Achtung: Die Ergebnisse sollen gemäß der rekursiven Definitionen aus der Vorlesung bzw. aus der obigen Aufgabe berechnet werden. Die bloße Angabe einer richtigen Antwort gilt nicht als Lösung. Zwischenergebnissen können dabei mittels Kommutativität, Assoziativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$ sowie **ausschließlich** der folgenden weiteren Gesetze vereinfacht werden: $\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$, $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$.