Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 18.11-22.05

Aufgabe 1 Triviale Falschheit (Präsenzaufgabe)

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel, die nur aus Konjunktionen, Atomen und Wahrheitskonstanten ($\top$ und $\bot$) gebildet ist. Zeigen Sie, dass für jede Wahrheitsbelegung κ, für die es ein Atom $A \in \mathcal{A}$ mit $\kappa(A) = \bot$ gibt, $\kappa \not\models \phi$ gilt, wenn A in ϕ vorkommt.

Aufgabe 2 Positives Denken (Präsenzaufgabe)

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel, die wie in der Vorlesung aus Konjunktion, Negation, Falsum und Atomen aufgebaut ist. Wir definieren rekursiv, dass ein Atom A *positiv* (*negativ*) in ϕ ist, wenn

- ϕ ein Atom ist (ϕ ein Atom ist außer A);
- $\phi = \neg\psi$ und A negativ (positiv) in ψ ist;
- $\phi = \psi \wedge \xi$ und A in ψ und in ξ positiv (negativ) ist.

(Insbesondere ist A weder negativ noch positiv in $\bot$.)

Beweisen Sie, dass ϕ erfüllbar ist, wenn jedes Atom $A \in \mathcal{A}$ ~~entweder~~ positiv oder negativ (oder beides) in ϕ ist. Kann eine solche Formel auch gültig sein?

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über den Aufbau von ϕ wie in der Vorlesung besprochen. Man muss in der Induktion in Wirklichkeit eine stärkere Aussage als die verlangte beweisen, indem man auch darüber redet, welche Wahrheitsbelegungen ϕ wahr bzw. falsch machen.

Aufgabe 3 Smith, Jones und Wahrheitstafeln (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Detektiv von Aufgabe 1, Übungsblatt 0 schließen kann, dass Smith der Mörder ist oder Jones lügt indem Sie (analog zu Aufgabe 2 , Übungsblatt 1) die Aufgabe in Aussagenlogik formalisieren und für die so erhaltene Formel die Wahrheitstafel aufstellen.

Aufgabe 4 Negationsnormalform (7 Punkte)

Eine aussagenlogische Formel ist in *Negationsnormalform (NNF)*, wenn sie durch die folgende Grammatik erzeugt werden kann:

$$\psi, \xi = A \mid \neg A \mid \psi \wedge \xi \mid \neg(\neg\psi \wedge \neg\xi) \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau von ϕ, dass ϕ zu einer Formel in NNF logisch äquivalent ist.

Hinweis: Die Definition von NNF aus der Vorlesung ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht relevant, auch wenn sie zu der oben angegebenen letztlich äquivalent ist. Insbesondere kommen in Formeln für Zwecke dieser Übung keine expliziten Disjunktionen $\vee$ vor.

Aufgabe 5 Syntax trifft Semantik (8 Punkte)

Seien ϕ und ψ zwei aussagenlogische Formeln wie in Aufgabe 2. Wir bezeichnen mit $\phi[\psi/A]$ die Formel, die wir erhalten, indem wir in ϕ jedes Vorkommen des Atoms A durch ψ ersetzen. Formal wird $\phi[\psi/A]$ wie folgt rekursiv definiert:

- $A[\psi/A] = \psi$
- $B[\psi/A] = B$ wenn $B \in \mathcal{A} - \{A\}$;
- $(\neg\phi)[\psi/A] = \neg(\phi[\psi/A])$;
- $(\phi \wedge \xi)[\psi/A] = \phi[\psi/A] \wedge \xi[\psi/A]$.

Beweisen Sie, dass die Formeln $\phi[\psi/A]$ und $(\phi[\top/A] \wedge \psi) \vee (\phi[\bot/A] \wedge \neg\psi)$ logisch äquivalent sind.

Hinweis: Es wird empfohlen, zunächst die folgende Hilfsaussage durch Induktion über den Aufbau von ϕ zu beweisen: für jede Wahrheitsbelegung κ gilt $\kappa \models \phi[\psi/A] \iff \kappa \models \phi[\kappa(\psi)/A]$, wobei $\kappa(\psi) = \top$, wenn $\kappa \models \psi$, und $\kappa(\psi) = \bot$ sonst.