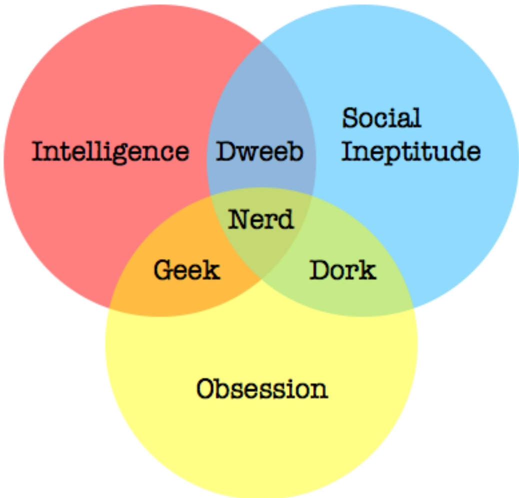
Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 11.11-15.11

Aufgabe 1 Mengendiagramme (Präsenzaufgabe)

Mengendiagramme bieten einen graphischen Weg, Wahrheitsbelegungen zu definieren:



Ein Punkt des Diagramms definiert eine Wahrheitsbelegung κ wie folgt: $\kappa(A) = \top$, wenn der Punkt zu dem mit A gekennzeichneten Bereich gehört, und andernfalls $\kappa(A) = \bot$.

Seien I, SI, O, Dw, Do, G, N die aussagenlogischen Variablen, die dem jeweiligen Bereich des gegebenen Diagramms entsprechen.

- Gelten die folgenden Formeln unter allen Wahrheitsbelegungen κ, die sich gemäß der gerade gegeben Definition im obigen Diagramm wiederfinden?
  - $(G \wedge Dw) \rightarrow Do$;
  - $(G \vee SI) \rightarrow (\neg O \wedge Dw)$;
  - $I \rightarrow ((Dw \wedge G) \vee \neg Do)$.
- Welche dieser Formeln sind *gültig*?
- Finden Sie für jede der folgenden Formeln eine Wahrheitsbelegung κ, die die Formeln wahr macht, und eine Wahrheitsbelegung κ, die sie falsch macht. In beiden Fällen muss κ im obigen Diagramm vorkommen.
  - $Dw \vee G \vee Do$;
  - $I \vee SI \vee O$;
  - $(I \wedge O) \vee (\neg Do \wedge Dw) \vee (\neg Dw \wedge Do)$.

Aufgabe 2 Krimi einmal ernst genommen (Präsenzaufgabe)

Formulieren sie die erste Aufgabe von Übungsblatt 0 in Aussagenlogik. Danach beweisen Sie, dass der Detektiv nicht schließen kann, dass Smith der Mörder ist, indem Sie die logische Folgerung zwischen den Fakten und der angeblichen Folgerung durch Angabe einer Wahrheitsbelegung widerlegen.

Aufgabe 3 Tom & Jerry (5 Punkte)

Man betrachte die folgende Grammatik in BNF:

$$\begin{aligned} F &::= \mathcal{F} \mid \mathit{enemy\ of\ } E \mid \mathit{friend\ of\ } F \\ E &::= \mathcal{E} \mid \mathit{friend\ of\ } E \end{aligned}$$

Wir verstehen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ als Mengen von Namen von Freunden bzw. Feinden, wobei $\mathcal{F} \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

Sind die Ausdrücke '*enemy of Tom*', '*enemy of enemy of Jerry*', '*friend of friend of Jerry*', '*friend of enemy of Tom*' Instanzen von F, unter der Bedingung, dass $\mathit{Jerry} \in \mathcal{F}$ und $\mathit{Tom} \in \mathcal{E}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 Erfülltheit von Formeln (5 Punkte)

Füllen Sie die folgende Tabelle mit Wahrheitsbelegungen aus, so dass die entsprechende Formel jeweils erfüllt bzw. nicht erfüllt ist.

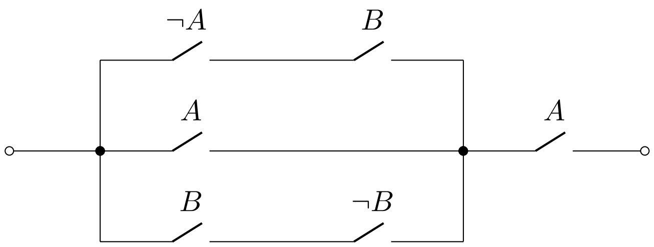
Formel	Erfüllt	Nicht erfüllt
$A \wedge B \wedge \neg C$		
$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C)$		
$\neg A \vee (A \wedge C) \vee (\neg C \wedge \neg A)$		
$\neg A \vee (A \leftrightarrow (B \wedge C))$		
$A \wedge \neg(A \rightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C))$		

Aufgabe 5 Logik und Schaltkreise (10 Punkte)

Wir betrachten hier Schaltkreise, die aus mit Kabeln verbundenen Schaltern bestehen. Jeder Schalter ist dabei entweder mit einem Buchstaben (z.B. A) oder mit einem negierten Buchstaben (z.B. $\neg A$) markiert.

Die Markierung soll im folgenden Sinne als eine physikalische Beziehung verstanden werden: Schalter, die mit demselben Buchstaben gekennzeichnet sind, befinden sich immer in gleicher Position, d.h. entweder alle eingeschaltet oder alle ausschaltet; Schalter, die mit einem negierten Buchstaben gekennzeichnet sind, befinden sich immer in der entgegengesetzten Position zu den Schaltern, die mit dem entsprechenden Buchstaben ohne Negationssymbol markiert sind.

Die Frage, wann zwischen zwei gegebenen Punkten in einem solchen Schaltkreis Strom fließt, kann als eine aussagenlogische Formel ausgedrückt werden. Beispielsweise entspricht der Schaltkreis



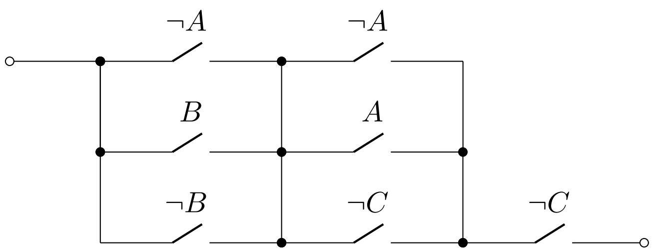
der Formel $((\neg A \wedge B) \vee A \vee (B \wedge \neg B)) \wedge A$.

1. Bilden Sie für jedes der folgenden Paare von äquivalenten aussagenlogischen Formeln entsprechende Paare von Schaltkreisen. Begründen Sie die Äquivalenz der Formeln, indem Sie physikalisch erklären, warum die entsprechenden Schaltkreise sich gleich verhalten. (So etwas ist natürlich kein formaler Beweis; trotzdem soll die physikalisch-anschauliche Argumentation vollständig angegeben werden.)

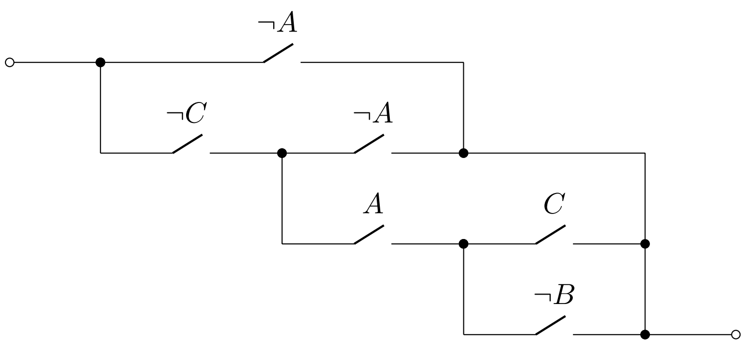
   a) $A \vee A$ und A;
   b) $A \vee (A \wedge B)$ und A;
   c) $A \vee (\neg A \wedge B)$ und $A \vee B$;
   d) $(B \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)$ und $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$.

2. Vereinfachen Sie die folgenden Schaltkreise, indem Sie die entsprechenden aussagenlogischen Formeln bilden, sie gemäß logischen Gesetzen wie in der vorigen Teilaufgabe entwickelt (und eventuell weiteren ähnlichen Gesetzen, die Sie wie in der vorigen Teilaufgabe herleiten) vereinfachen und dann anschließend wieder Schaltkreise für die Ergebnisse bilden.

   a)



   b)



Bonusaufgabe (3 Punkte)

Bilden Sie einen Schaltkreis zum Schalten der Beleuchtung in einem Zimmer derart, dass man anhand von drei Schaltern die Beleuchtung im Zimmer so verwalten kann, dass jeder von den drei Schaltern das Licht umschaltet. Ein Schalter schaltet also das Licht ein, wenn es aus war, und schaltet es aus, wenn es ein war. Die Schalter sollen unabhängig bedienbar sein, d.h. mit verschiedenen Buchstaben markiert sein.