Grundlagen der Logik und Logik-Programmierung WS 2013

Übungsblatt 0

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 04.11-08.11

Aufgabe 1 Wer ist der Mörder? (6 Punkte)

Ein Detektiv hat folgende Fakten an einem Tatort festgestellt.

- Wenn Jones in der letzten Nacht Smith nicht getroffen hat, dann ist Smith der Mörder oder Jones hat gelogen.
- Wenn Smith kein Mörder ist, dann hat Jones ihn in der letzten Nacht nicht getroffen und der Mord ist nach Mitternacht passiert.
- Wenn der Mord nach Mitternacht passiert ist, dann ist Smith der Mörder oder Jones hat gelogen.

Kann er mit Sicherheit darauf schließen, dass Smith der Mörder ist?

Aufgabe 2 Dame oder Tiger (6 Punkte)

Dame oder Tiger ist ein logisches Rätsel vom US-amerikanischen Mathematiker und Logiker Raymond Smullyan. Es geht um Räume sowie um Damen und Tiger, die in diesen Räumen zu finden sind. Im Rätsel darf ein Gefangener des Königs von Indrabad zwischen zwei Türen einmal wählen und seiner Wahl zufolge entweder eine Dame gewinnen (!) oder von einem wilden Tiger zerfleischt werden. Er weiß folgendes: In den beiden Räumen (**Raum I** und **Raum II**) befindet sich jeweils entweder genau eine Dame oder genau ein Tiger. Insbesondere ist es auch möglich, dass sich in beiden Räumen Damen oder in beiden Räumen Tiger aufhalten. Humanerweise besteht insofern keine Pflicht, eine Tür zu wählen, und wenn der Gefangene geschlossen hat, dass ihn hinter beiden Türen ein Tiger erwartet, dann ist es sinnvoll, auf die Wahl zu verzichten. Als weitere Hinweise stehen dem Gefangenen nur Schilder, die an den Türen hängen, zur Verfügung, deren Wahrheitsgehalt allerdings zunächst unklar ist, sowie eine (glaubwürdige) Aussage des Königs über den Wahrheitsgehalt der Schilder.

Wir betrachten hier zwei Varianten des Rätsels wie folgt:

Fall 1: Die Schilder an den entsprechenden Türen:

Raum I	**Raum II**
In diesem Raum ist eine Dame, und in dem anderen Raum ist ein Tiger.	In einem dieser Räume ist eine Dame, in einem dieser Räume ist ein Tiger.

König: Die Aussage auf einem der Schilder ist wahr, die auf dem anderen ist falsch.

Fall 2: Die Schilder an den entsprechenden Türen:

Raum I	**Raum II**
Zumindest in einem der Räume befindet sich eine Dame.	Im anderen Raum befindet sich ein Tiger.

König: Die Aussagen auf den Schildern sind entweder beide richtig oder beide falsch.

Gibt es für den Gefangenen eine Gewinnstrategie in diesen zwei Szenarios? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 Kugeln (Präsenzaufgabe)

Drei Kästen stehen auf dem Tisch. In einem Kasten liegen zwei weiße Kugeln, in einem anderen Kasten eine weiße und eine schwarze, und im verbleibenden Kasten zwei schwarze. Alle drei Kästen sind verschlossen und mit Schildern ausgestattet, die den Inhalt des Kastens angeben (als aus entweder zwei schwarzen Kugeln, zwei weißen Kugeln oder einer schwarzen und einer weißen Kugel bestehend), aber keins davon trifft zu. Wie kann man mit geschlossenen Augen eine Kugel ziehen (so dass man also die Farbe der gezogenen, nicht aber die der verbleibenden Kugel sieht) und daraus mit Sicherheit schließen, wo welche Kugeln liegen?

Aufgabe 4 Induktion (Wiederholung) (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptungen durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

1. Sei x eine reelle Zahl, so dass $x + 1/x$ eine ganze Zahl ist. Dann ist $x^n + 1/x^n$ auch eine ganze Zahl.

2. $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Aufgabe 5 Induktion für Fibonacci (Präsenzaufgabe)

Die Fibonacci-Folge F_0, F_1, F_2, ... ist durch das folgende rekursive Bildungsgesetz definiert:

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (\text{für } n \geq 1)$$

Beweisen sie durch Induktion über n die Moivre-Binet-Formel:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 6 Fehlerhafte Induktion (Präsenzaufgabe)

Was ist bei den folgenden Induktionsbewisen falsch gelaufen?

Jeder Bus kann beliebig viele Studenten fassen.

Wir beweisen per Induktion über die Anzahl n von Studenten, dass n Studenten in den Bus passen.

Induktionsanfang $n = 1$*:* Der Bus ist natürlich gross genug, um eine Person zu fassen.

Induktionsschritt $n-1 \to n$*:* Wenn $n-1$ Studenten schon drin sind, dann weiß jeder, dass immer noch ein Student hineinpasst.

Alle Schafe einer Herde haben die gleiche Farbe.

Beweis per Induktion über die Größe n der Herde:

Induktionsanfang $n = 1$: klar.

Induktionsschritt $n - 1 \to n$*:* Wir betrachten eine Herde von n Schafen. Wenn wir ein Schaf herausnehmen, bleibt eine Herde von $n - 1$ Schafen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben, übrig. Jetzt fügen wir das herausgenommene Schaf wieder hinzu und nehmen ein anderes Schaf heraus; auch hier haben die übriggebliebenen $n - 1$ Schafe nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Also haben alle n Schafe der Herde die gleiche Farbe.