Grundlagen der Logik und Logikprogrammierung WiSe 2013/14

Klausur [Probe]

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

1. $((A \wedge B) \rightarrow C) \models (A \rightarrow (B \rightarrow C))$,
2. $(A \rightarrow B) \models (B \rightarrow A)$,
3. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A)) \models \perp$ (hier steht $\perp$ für *falsum*),
4. $((A \vee B) \wedge A) \models \neg B$.

Im negativen Fall reicht es, wenn Sie ein einzelnes Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2 Aussagenlogische Resolution

Wenden Sie den Resolutionsalgorithmus an, um zu entscheiden, ob die KNF

$(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C \vee B) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg A)$

erfüllbar ist.

Aufgabe 3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(g(X, h(Z)), Z) \text{ und } f(g(h(Z), h(Z)), h(W))$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4 Logische Programmierung

Programmieren Sie in Prolog ein Prädikat *zip*/3, das eine Funktion implementiert, die die Elemente zweier Listen paarweise zu Zweierlisten verknüpft, d.h. es soll gelten

$$\mathit{zip}([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_m], l) \iff l = [[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]]$$

mit $k = \min(n, m)$ – d.h. die übrigbleibenden Elemente der längeren Liste werden ignoriert. Programmieren Sie ferner eine Variante *zip2* von *zip*, in der die übrigbleibenden Elemente am Ende angehängt werden, d.h.

$$\mathit{zip2}([a_1, \dots, a_n], [b_1, \dots, b_m], l) \iff l = \begin{cases} [[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m], a_{m+1}, \dots, a_n] & (n \geq m) \\ [[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], b_{n+1}, \dots, b_m] & (m > n). \end{cases}$$

Aufgabe 5 Formale Deduktion in Logik erster Stufe

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für das Trinkerparadoxon

$$\exists X. (p(X) \to \forall Y. p(Y))$$

an. (Dabei ist p ein einstelliges Prädikat.)

Aufgabe 6 Induktion

Sei $\Sigma = \{mult/2, zero/1, one/1\}$, und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell, so dass $M = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}[\![zero]\!] = 0$, $\mathfrak{M}[\![one]\!] = 1$ und für alle $x, y \in M$

$$\mathfrak{M}[\![mult]\!](x, y) = x * y.$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass für jeden geschlossenen Term E (d.h. E enthält keine freien Variablen, formal: $FV(E) = \emptyset$) gilt

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] \in \{0, 1\}.$$

Die Aufgaben sind untereinander gleich gewichtet; die Klausur ist mit der Hälfte der Punkte in jedem Fall bestanden.