Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: Fr, 31.05., 12:00 im Briefkasten am blauen Hochhaus

PRÄSENZAUFGABEN

Übung 1 Kritische Paare berechnen

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 2, Aufgabe 1:

$$A \cdot x \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{1}$$
$$C \cdot (D \cdot x) \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{2}$$
$$B \cdot (x \cdot y) \to_0 A \cdot (D \cdot x) \tag{3}$$
$$B \cdot (B \cdot x) \to_0 D \cdot x \tag{4}$$

Bestimmen Sie nun alle kritischen Paare des Systems und geben Sie dazu jeweils die involvierten Regeln sowie den entsprechenden allgemeinsten Unifikator an. (Achten Sie hierbei darauf, Variablen nötigenfalls umzubenennen, um unbeabsichtigte Namensgleichheit zu vermeiden!)

Übung 2 Konfluenz mittels Newmans Lemma

Wir betrachten erneut das Termersetzungssystem aus Blatt 3, Übung 1:

$$x \odot (y \oplus z) \to_0 (x \odot y) \oplus (x \odot z) \tag{5}$$
$$(x \oplus y) \oplus z \to_0 x \oplus (y \oplus z) \tag{6}$$

Nun möchten wir zeigen, dass es konfluent ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass das System terminierend ist, genügt es nach Newmans Lemma zu zeigen, dass es *lokal konfluent* ist. Ihre Aufgabe ist es also, die lokale Konfluenz des Systems zu zeigen, d.h. alle kritischen Paare des Systems zu bestimmen und anschließend für jedes Paar zu zeigen, dass es zusammengeführt werden kann.

Hausaufgaben

Übung 3 Ein nicht-konfluentes System (6 Punkte)

Finden Sie für das System über der Signatur $\Sigma = \{\uplus/2, \top/0, \bot/0\}$ aus Blatt 3, Übung 3 **zwei** kritische Paare, die nicht zusammenführbar sind. Geben Sie dabei jeweils für die einzelnen Ableitungsschritte Kontexte und allgemeinste Unifikatoren an.

$$(\top \uplus x) \uplus \top \to_0 x \uplus x \tag{7}$$
$$x \uplus (y \uplus \top) \to_0 \bot \uplus (x \uplus y) \tag{8}$$
$$(x \uplus y) \uplus z \to_0 y \uplus (x \uplus z) \tag{9}$$

Übung 4 Prädikatenlogik als TES II (7 Punkte)

Es sei erneut Σ ein Vokabular der Prädikatenlogik erster Stufe, d.h. es sei $\Sigma \supseteq \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \exists, \forall\}$, wobei wir vereinbaren, dass $\neg$ unär ist und die restlichen Operatoren binär sind. Wir verwenden $\exists x.y$ als abkürzende Schreibweise für $\exists(x, y)$, analog für $\forall$. Wir betrachten das Termersetzungssystem vom letzten Übungsblatt:

$$\neg\neg x \to_0 x \tag{10}$$
$$(x \wedge y) \to_0 \neg(\neg x \vee \neg y) \tag{11}$$
$$\neg(x \wedge y) \to_0 (\neg x \vee \neg y) \tag{12}$$
$$(x \Rightarrow y) \to_0 (\neg x \vee y) \tag{13}$$
$$x \vee (y \vee z) \to_0 (x \vee y) \vee z \tag{14}$$
$$\forall x.y \to_0 \neg(\exists x.\neg y) \tag{15}$$

Bestimmen Sie, ob dieses System konfluent ist: Falls ja, finden Sie alle kritischen Paare und zeigen Sie, dass diese zusammenfürbar sind. Falls nein, geben Sie ein kritisches Paar an, das nicht zusammenführbar ist.

Übung 5 $\uparrow$-$\downarrow$-Kollabieren II (7 Punkte)

Wir betrachten das Termersetzungssystem über der Signatur $\Sigma = \{\uparrow/1, \downarrow/1\}$ vom letzten Übungsblatt:

$$\uparrow(\uparrow(x)) \to_0 \downarrow(\uparrow(x)) \tag{16}$$
$$\downarrow(\uparrow(x)) \to_0 \uparrow(x) \tag{17}$$
$$\uparrow(\downarrow(x)) \to_0 \downarrow(\uparrow(x)) \tag{18}$$
$$\downarrow(\downarrow(x)) \to_0 \downarrow(x) \tag{19}$$

1. Zeigen Sie, dass das System konfluent ist.
2. Es sei t ein beliebiger nichttrivialer Term (d.h. $t \notin V$). Bestimmen Sie die Normalform von t (in Abhängigkeit von der Struktur von t). Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie beispielsweise einen Algorithmus angeben.