# Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen: Do, 23.05., 12:00 im Briefkasten am blauen Hochhaus

**Präsenzaufgaben**

## Übung 1 Terminationsbeweis mittels Polynomordnung

Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem für $\Sigma = \{\oplus, \odot\}$:

$$x \odot (y \oplus z) \to_0 (x \odot y) \oplus (x \odot z) \tag{1}$$
$$(x \oplus y) \oplus z \to_0 x \oplus (y \oplus z) \tag{2}$$

Wir möchten mithilfe von Polynomordnungen zeigen, dass dieses System stark normalisierend ist, und verwenden dazu die folgenden Polynome:

$$p_\odot(X, Y) := XY$$
$$p_\oplus(X, Y) := 2X + Y + 1$$

Es genügt nun, eine geeignete Domäne (die Menge $A$ einer polynomiellen Interpretation, in diesem Fall also eine Teilmenge von $\mathbb{N}$) für die Ordnung zu finden und sicherzustellen, dass die Reduktionsregeln bezüglich der Ordnung absteigend sind.

1. Es sei $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p_\odot, p_\oplus \rangle$ die einfachste auf $p_\odot$ und $p_\oplus$ basierende polynomielle Interpretation von $\Sigma$. Begründen Sie, dass die von $\mathcal{A}$ induzierte Polynomordnung $\succ_\mathcal{A}$ nicht geeignet ist, um die Termination des Systems zu zeigen.
2. Finden Sie eine geeignete Domäne $B \subset \mathbb{N}$ für welche die durch die Interpretation $\mathcal{B} = \langle B, p_\odot, p_\oplus \rangle$ induzierte Polynomordnung $\succ_\mathcal{B}$ die Termination des Systems zeigt.
3. Wir ersetzen die zweite Reduktionsregel durch
$$x \oplus (y \oplus z) \to_0 (x \oplus y) \oplus z \tag{3}$$
Zeigen Sie unter Verwendung einer Polynomordnung, dass das so erhaltene System ebenfalls stark normalisierend ist.

## Übung 2 Woher kommen diese Polynome?

Wir betrachten das folgende in Haskell-Syntax gegebene Programm:

```
data Nat = Z | S Nat

x + Z = x
x + (S y) = S (x + y)

d Z = Z
d (S x) = S (S (d x))

q Z = Z
q (S x) = q x + S (d x)
```

1. Drücken Sie dieses Programm als Termersetzungssystem über der Signatur $\Sigma = \{0, s, +, d, q\}$ aus.

2. Verwenden Sie eine Polynomordnung um zu beweisen, dass das System stark normalisierend ist. **Hinweis:** Wählen Sie $p_s(X) := X + 1$ und leiten Sie hieraus geeignete Werte für $p_+$, $p_d$, $p_q$ und $p_0$ her.

3. Können wir also schließen, dass jedes aus den obigen Funktionen zusammengesetze Programm terminierend sein wird? Wird die Termination eines solchen Programmes davon abhängen, ob eine strikte oder eine nicht-strikte Auswertungstrategie verwendet wird?

HAUSAUFGABEN

## Übung 3 Eine weitere Polynomordnung (6 Punkte)

Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem für $\Sigma = \{\uplus/2, \top/0, \bot/0\}$, wobei wir $\uplus$ in Infixschreibweise notieren:

$$(\top \uplus x) \uplus \top \to_0 x \uplus x \tag{4}$$
$$x \uplus (y \uplus \top) \to_0 \bot \uplus (x \uplus y) \tag{5}$$
$$(x \uplus y) \uplus z \to_0 y \uplus (x \uplus z) \tag{6}$$

Zeigen Sie mithilfe einer Polynomordnung, dass dieses System stark normalisierend ist.

**Hinweis:** Für $\uplus$ eignet sich ein Polynom, das in einem Argument quadratisch ist.

## Übung 4 Prädikatenlogik als TES (9 Punkte)

Es sei $\Sigma$ ein Vokabular der Prädikatenlogik erster Stufe, d.h. es sei $\Sigma \supseteq \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \exists, \forall\}$, wobei wir vereinbaren, dass $\neg$ unär ist und die restlichen Operatoren binär sind. Wir verwenden $\exists x.y$ als abkürzende Schreibweise für $\exists(x, y)$ und analog für $\forall$. Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$\begin{aligned}
\neg\neg x &\to_0 x \\
(x \wedge y) &\to_0 \neg(\neg x \vee \neg y) \\
\neg(x \wedge y) &\to_0 (\neg x \vee \neg y) \\
(x \Rightarrow y) &\to_0 (\neg x \vee y) \\
x \vee (y \vee z) &\to_0 (x \vee y) \vee z \\
\forall x.y &\to_0 \neg(\exists x.\neg y)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels einer Polynomordnung, dass das obige System terminiert. **Hinweis:** Wählen Sie $p_\neg(X) := X + 1$.

## Übung 5 ↑-↓-Kollabieren (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem über der Signatur $\Sigma = \{\uparrow/1, \downarrow/1\}$:

$$\uparrow(\uparrow(x)) \to_0 \downarrow(\uparrow(x)) \tag{7}$$
$$\downarrow(\uparrow(x)) \to_0 \uparrow(x) \tag{8}$$
$$\uparrow(\downarrow(x)) \to_0 \downarrow(\uparrow(x)) \tag{9}$$
$$\downarrow(\downarrow(x)) \to_0 \downarrow(x) \tag{10}$$

Zeigen Sie mittels einer Polynomordnung, dass dieses System stark normalisierend ist.