Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen: Do, 09.05., 12:00 im Briefkasten am blauen Hochhaus

PRÄSENZAUFGABEN

Übung 1 Eigenschaften von binären Relationen

Zeigen Sie in `Coq`, dass für beliebige Relationen $R, S \subseteq X \times X$ und $T \subseteq X \times X$ die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $(R^-)^- = R$ $\quad$ ($(-)^-$ ist Involution)
2. $(R \circ T)^- = T^- \circ R^-$ $\quad$ ($(-)^-$ ist Antiautomorphismus)
3. $R \subseteq S \Longrightarrow R \circ T \subseteq S \circ T$ $\quad$ (Monotonie der Komposition)
4. $R \subseteq S \Longrightarrow R^- \subseteq S^-$ $\quad$ (Monotonie der Inverse)

Hinweis: Verwenden Sie als Vorlage die Datei `ueb1_rel.v` von der Übungshomepage und erinnern Sie sich an die `Coq`-Taktiken, die Sie in GLoIn gelernt haben.*

NB: Die Beweise funktionieren auch allgemeiner für Relationen $R \subseteq X \times Y$, wir beschränken uns hier auf eine einzelne Menge X, um die Beweise in `Coq` einfacher zu gestalten.

Übung 2 Wiederholung: Unifikation

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus um zu entscheiden ob die folgenden Gleichungen in der Signatur $\Sigma = \{+/2, \cdot/2, -/1, {}^{-1}/1, \mathsf{0}/0, \mathsf{1}/0\}$ (die Signatur von *Körpern*) unifizierbar sind und geben Sie in dem Fall einen allgemeinsten Unifikator an. Es gilt die übliche Präzedenz.

1. $(\mathsf{1} + (-y)) \cdot x^{-1} \doteq (\mathsf{1} + (-(-\mathsf{1}))) \cdot (z + x \cdot \mathsf{1})^{-1}$
2. $x \cdot (y^{-1} \cdot y) + (z + y) \doteq x \cdot x + (\mathsf{0} + \mathsf{0} \cdot \mathsf{1})$
3. $y + (x \cdot 1) \doteq (z + 0)^{-1} + y$

Hinweis: Der Unifikationsalgorithmus sollte aus GLoIn bekannt sein: `https://www8.cs.fau.de/_media/ws18:gloin:skript.pdf`. Geben Sie bitte für jeden Schritt explizit die angewendete Regel (delete, decomp, conflict, orient, occurs, elim) an.

*siehe `https://www8.cs.fau.de/_media/ws16:gloin:coq_table.pdf`

Lösung:

1. (a) decomp: $\{\underline{1 + (-y) \doteq 1 + (-(-1))}, \underline{x^{-1} \doteq (z + x \cdot 1)^{-1}}\}$
   (b) decomp: $\{1 \doteq 1, -y \doteq -(-1), \underline{x \doteq z + x \cdot 1}\}$
   (c) occurs: $\bot$
2. (a) decomp: $\{\underline{x \cdot (y^{-1} \cdot y) \doteq x \cdot x}, \underline{z + y \doteq 0 + 0 \cdot 1}\}$
   (b) decomp: $\{\underline{x \doteq x}, y^{-1} \cdot y \doteq x, z \doteq 0, y \doteq 0 \cdot 1\}$
   (c) delete: $\{\underline{y^{-1} \cdot y \doteq x}, z \doteq 0, y \doteq 0 \cdot 1\}$
   (d) orient: $\{x \doteq y^{-1} \cdot y, z \doteq 0, \underline{y \doteq 0 \cdot 1}\}$
   (e) elim: $\{x \doteq (0 \cdot 1)^{-1} \cdot (0 \cdot 1), z \doteq 0, y \doteq 0 \cdot 1\}$

   $mgu = [x \mapsto (0 \cdot 1)^{-1} \cdot (0 \cdot 1), y \mapsto 0 \cdot 1, z \mapsto 0]$
3. (a) decomp: $\{y \doteq (z + 0)^{-1}, \underline{x \cdot 1 \doteq y}\}$
   (b) orient: $\{y \doteq (z + 0)^{-1}, \underline{y \doteq x \cdot 1}\}$
   (c) elim: $\{\underline{x \cdot 1 \doteq (z + 0)^{-1}}, y \doteq x \cdot 1\}$
   (d) conflict: $\bot$

HAUSAUFGABEN

Übung 3 Eigenschaften von binären Relationen 2 (6+2 Punkte)

Seien $R, S \subseteq X \times X$ beliebige Relationen.

1. Geben Sie eine transitive Relation R auf einer beliebigen Menge an, deren symmetrischer und reflexiver Abschluss nicht transitiv ist.
2. Zeigen Sie in `Coq`:
   (a) R ist transitiv und S ist transitiv $\Rightarrow R \cap S$ ist transitiv.
   (b) R ist symmetrisch und S ist symmetrisch $\Rightarrow R \cup S$ ist symmetrisch.
3. Zeigen Sie in `Coq`: R ist eine Äquivalenz $\Rightarrow id \subseteq R$ und $R = R \circ R^-$
4. Bonus (2 Punkte): Zeigen Sie in `Coq`, dass die 3. Aussage auch in Gegenrichtung gilt.

Hinweis: Verwenden Sie als Vorlage die Datei `ueb1_rel.v` von der Übungshomepage. Für eine korrekte Lösung ist jedes Vorkommen von `Admitted`. durch `Qed`. zu ersetzen.

Übung 4 Unifikation (4 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus von Martelli/Montanari um zu entscheiden ob die folgenden Gleichungen in der Signatur $\Sigma = \{\mathrm{add}/2, \mathrm{sub}/2, \mathrm{mult}/2, \mathrm{div}/2, \mathtt{0}/0, \mathtt{1}/0\}$ unifizierbar sind und geben Sie in dem Fall einen allgemeinsten Unifikator an.

1. $\mathrm{add}(x, \mathrm{mult}(x, \mathrm{div}(y, \mathtt{0}))) \doteq \mathrm{add}(\mathrm{sub}(z, \mathtt{1}), \mathrm{mult}(y, z))$
2. $\mathrm{sub}(\mathrm{add}(z, y), \mathrm{div}(\mathtt{0}, z)) \doteq \mathrm{sub}(\mathrm{add}(z, \mathrm{div}(x, z)), \mathtt{0})$
3. $\mathrm{mult}(x, \mathrm{sub}(\mathrm{div}(1, y), 1)) \doteq \mathrm{mult}(\mathrm{div}(y, 0), \mathrm{sub}(x, 1))$

Hinweis: Der Unifikationsalgorithmus sollte aus GLoIn bekannt sein: `https://www8.cs.fau.de/_media/ws18:gloin:skript.pdf`. Geben Sie bitte für jeden Schritt explizit die angewendete Regel (delete, decomp, conflict, orient, occurs, elim) an.