Ontologien im Semantic Web SoSe 2018

Übungsblatt 5

Abgabe: 09.07.2018

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe die Namen aller Beteiligten.

Aufgabe 1 Anwendungen des Tableaukalküls (5 Punkte)

Verwenden Sie den Tableaukalkül, um folgende Formeln auf Erfüllbarkeit zu prüfen:

$$\Box(p \to (\Diamond q \lor \Diamond r)) \land \Diamond(p \land q) \land \Box\Box((q \lor r) \to p) \land \Box(q \to \Box\neg p)$$
$$\Box(p \to (\Diamond q \lor \Diamond r)) \land \Diamond\top \land \Box(\neg p \to \Box\neg p) \land \Box\Box(p \land \neg r) \land ((\Box\neg p) \to \Diamond\Diamond\top).$$

Aufgabe 2 Große Modelle (6 Punkte)

Gegeben seien Atome $q_1, q_2, \dots$ und $p_1, p_2, \dots$. Man definiere die Familie von Formeln ϕ_n durch

$$\phi_n = p_0 \land \bigwedge_{i=0}^{n-1} \Box^i (p_i \to (\Diamond(p_{i+1} \land q_{i+1}) \land \Diamond(p_{i+1} \land \neg q_{i+1})))\land$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \Box^i (p_i \to \bigwedge_{j=1}^{i} ((q_j \to \Box q_j) \land (\neg q_j \to \Box\neg q_j))).$$

Hierbei schreiben wir abkürzend $\Box^n$ für n Boxen $\Box$ hintereinander und $\Box^{\leq n}\phi$ für $\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \Box^i \phi$. Zeigen Sie, dass

a) jedes Modell von ϕ_n mindestens 2^n Elemente hat; und

b) jedes ϕ_n *erfüllbar in* $S4$ ist, d.h. ein Modell mit transitiver und reflexiver Übergangsrelation hat.

Geben Sie (in O-Notation) eine polynomielle Abschätzung für die Größe von ϕ_n in Abhängigkeit von n an. Folgern Sie, dass jede Modallogik zwischen der Logik K *aller* Kripkerahmen und der Logik $S4$ der transitiven und reflexiven Kripkerahmen *nicht* die sogenannte *polynomielle Modelleigenschaft* hat, d.h. es existiert kein Polynom p, so dass jede erfüllbare Formel ϕ ein Modell mit höchstens $p(|\phi|)$ Zuständen hat, wobei $|\phi|$ die syntaktische Größe von ϕ bezeichnet.

Hinweis: Die p_i markieren *Ebenen* des Modells; in der i-ten Ebene sind die Belegungen von $q_1, \dots, q_i$ festgelegt, und im nächsten Schritt wird jeweils zu den beiden möglichen Belegungen von q_{i+1} verzweigt. Zeigen Sie induktiv, dass jede Belegung von $q_1, \dots, q_i$ in einem Zustand in Ebene i realisiert wird.

Aufgabe 3 Keine großen Modelle (4 Punkte)

$S5$ bezeichnet die Modallogik der transitiven, reflexiven und symmetrischen Kripkerahmen (deren Zustandsübergangsrelation also eine Äquivalenzrelation ist). Zeigen Sie, dass die Methode von Aufgabe 2 zur Widerlegung der polynomiellen Modelleigenschaft für $S5$ nicht anwendbar ist, weil die Formeln ϕ_n in solchen Rahmen nicht erfüllbar sind.

Aufgabe 4 Universelle Modelle (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede $S5$-erfüllbare Formel über einem *universellen* Kripkerahmen erfüllbar ist, d.h. einem Rahmen der Form (X, R) mit $R = X \times X$.