Ontologien im Semantic Web SoSe 2018

Übungsblatt 2

Abgabe: 24.05.2018

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe die Namen aller Beteiligten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei Σ die leere Signatur. Was sind Σ-Modelle? Zeigen Sie mittels Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass die Klasse der *endlichen* Σ-Modelle nicht FO-definierbar ist. Geben Sie außerdem ein alternatives (sehr kurzes) Argument über Kompaktheit an. Das Argument per Ehrenfeucht-Fraïssé liefert etwas mehr als das Kompaktheitsargument – was?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie folgende Abschlusseigenschaften für FO-definierbare Klassen.

1. Wenn $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ ist, dann ist auch $\mathcal{D} - \mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$.
2. Wenn $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ sind, so auch $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.
3. Wenn $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}$ FO-definierbar in $\mathcal{E}$ ist, dann ist $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{E}$.

Zeigen Sie ferner mittels Aufgabe 1, dass FO-Definierbarkeit nicht *abgeschlossen unter Projektion* ist: Wir bezeichnen für eine Teilsignatur Σ_0 von Σ und ein Σ-Modell $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}|_{\Sigma_0}$ den Σ_0-*Redukt* von $\mathfrak{A}$, also das Σ_0-Modell mit Grundbereich A, das alle Symbole in Σ_0 so interpretiert wie $\mathfrak{A}$. Wenn eine Klasse $\mathcal{C}$ FO-definierbar ist, ist die Klasse

$$\mathcal{C}|_{\Sigma_0} = \{\mathfrak{A}|_{\Sigma_0} \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\}$$

i.a. nicht FO-definierbar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Liefern Sie den fehlenden Schritt im Beweis der FO-Undefinierbarkeit von Erreichbarkeit aus der Vorlesung, d.h. geben Sie eine Formel $\psi(x, y)$ über $\Sigma = \{\leq\}$ an, die zwei Elemente einer endlichen linearen Ordnung genau dann in Beziehung setzt, wenn (bei der gegebenen Anordnung!) genau ein Element zwischen ihnen liegt, wobei wir die Ordnung zu einem Ring schließen, in dem auf das größte Element wieder das kleinste folgt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Geben Sie wahlweise eine logische Reduktion von Zusammenhang ungerichteter Graphen auf Erreichbarkeit in gerichteten Graphen oder umgekehrt an. (Erläuterung: dann impliziert die

Nicht-FO-Definierbarkeit der Eigenschaft, die reduziert wird, die Nicht-FO-Definierbarkeit der Eigenschaft, auf die reduziert wird. Für beide Eigenschaften kann man sich die Nicht-FO-Definierbarkeit als durch Reduktion von $EVEN$ gezeigt denken.)