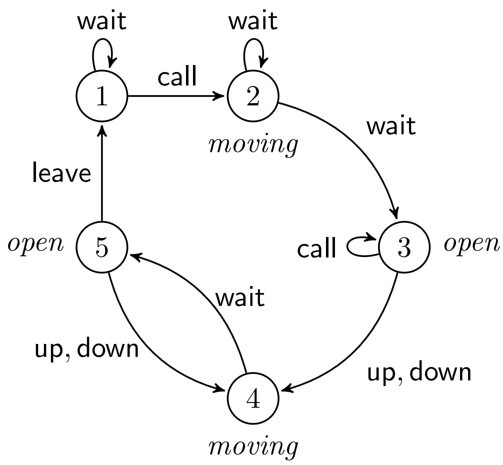
Übungsblatt 6

Abgabe bis 21.06.2017

Rev. 16993

Aufgabe 1 Erfülltheitspiele 8 Punkte

1. Wir betrachten erneut die Modellierung einer Aufzugsteuerung aus Aufgabe 1, Übungsblatt 1:



   (a) Geben Sie die Erfülltheitsspiele $\mathcal{G}_{\models}(\mathcal{M}, 4, \psi_1)$ und $\mathcal{G}_{\models}(\mathcal{M}, 2, \psi_2)$ an, wobei:

   $$\psi_1 := \Box_{\mathsf{wait}}(\Diamond_{\mathsf{leave}}\top \wedge \Box_{\mathsf{call}}\,\mathit{open}) \qquad \psi_2 := \Box_{\mathsf{wait}}\Diamond_{\mathsf{down}}\mathit{moving} \to \Diamond_{\mathsf{call}}\,\mathit{open}$$

   Überführen Sie dazu die Formeln ψ_1 und ψ_2 (wenn nötig) zunächst in Negationsnormalform und verfahren Sie dann entsprechend Definition 4.6. aus der Vorlesung.

   Hinweis: Es genügt hier, nur den bei dem jeweiligen Knoten (d.h. $(4, \psi_1)$ bzw. $(2, \psi_2)$) startenden Teilbaum des Erfülltheitsspiels vollständig anzugeben. Es ist jedoch notwendig, für alle relevanten Knoten anzugeben, welchem Spieler sie jeweils gehören. Beachten Sie weiterhin, dass die Formeln ψ_1 und ψ_2 multimodal sind, sodass die zu definierenden Erfülltheitsspiele leicht von Definition 4.6 abweichen.

   (b) Lösen Sie dann die beiden Spiele und geben sie die Gewinnstrategie des jeweils gewinnenden Spielers explizit an.

2. Beweisen Sie: Für jedes Modell $\mathcal{M}$, jede modale Formel φ und jeden Zustand w in $\mathcal{M}$,

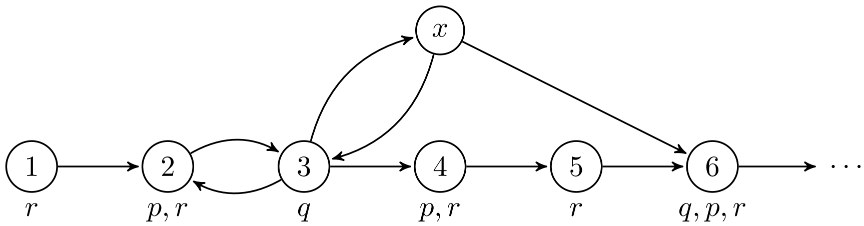
   $$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{Eloise gewinnt den Knoten } (w, \varphi) \text{ in } \mathcal{G}_{\models}(\mathcal{M}, w, \varphi).$$

   Hinweis: Hierzu ist es für die Hin-Richtung notwendig, aus der Tatsache, dass $\mathcal{M}, w \models \varphi$ gilt, eine Eloise-Strategie s zu konstruieren und dann zu zeigen, dass s eine Gewinnstrategie ist; letzteres können Sie zeigen, indem Sie (per Induktion über ψ) beweisen, dass für alle Formeln ψ und alle Zustände v mit $\mathcal{M}, v \models \psi$ gilt, dass jeder Lauf des Spiels, der bei (v, ψ) startet und der Ihrer Strategie s folgt, in einem Abelard-Knoten endet.

   Für die Rück-Richtung des Beweises ist eine Gewinnstrategie anzunehmen und mit deren Hilfe dann (wieder per Induktion über Formeln) herzuleiten, dass tatsächlich $\mathcal{M}, w \models \varphi$ gilt.

Aufgabe 2 Selektion — 2 Punkte

Wir betrachten das Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$



welches wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \{x\} \cup \{i \mid i > 0\} \\
\mathcal{R} &= \{(i, i+1) \mid i > 0\} \cup \{(3,2), (3,x), (x,3), (x,6)\} \\
\mathcal{V}(p) &= \{j \mid j \text{ is even}\} \\
\mathcal{V}(q) &= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N}. j = 3i\} \\
\mathcal{V}(r) &= \mathbb{N}_{>0} \setminus \{3\}
\end{aligned}$$

Es sei $\psi = \Diamond(\neg\Diamond r \vee \Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond q))$. Berechnen Sie das Ergebnis der Anwendung der Selektionsfunktion aus dem Beweis von Theorem 4.10 auf ψ und 1, d.h. Berechnen Sie $s(\psi, 1)$. Definieren Sie mithilfe der erhaltenen Menge das durch Selektion aus $\mathcal{M}$ hervorgehende Modell $\mathcal{M}^{\psi,1}$.