Übungsblatt 5

Abgabe bis 14.06.2017

Rev. 16912

Hinweis: Aufgaben ohne Angabe von Punkte sind Präsenzaufgaben, d.h. werden gemeinsam in der Übung bearbeitet.

Aufgabe 1 Definierbarkeit von Klassen von Rahmen

1. Erinnern wir uns, dass die vom Löb-Axiom

$$\text{(L)} \qquad \Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

generierte normale Modallogik **L** als *Beweisbarkeitslogik* (engl.: provability logic) bekannt ist. Wir haben bereits gezeigt, dass **L** korrekt für S_{FTT} ist, wobei S_{FTT} die Klasse aller Rahmen bezeichnet, die einen endlichen, transitiven Baum als Relation haben; tatsächlich ist **L** auch vollständig für S_{FTT}.

Beweisen Sie Lemma 3.37 aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass es keine prädikatenlogische Formel erster Stufe gibt, die mit (L) lokal korrespondiert.

2. Es folgt aus Satz 3.39 aus der Vorlesung, dass Modalformeln mit ihrer jeweiligen Übersetzung *zweiter Stufe* lokal korrespondieren. Beweisen Sie Satz 3.39 indem Sie zeigen, dass für alle Modalformeln φ die n aussagenlogische Atome $p_1, \ldots, p_n$ verwenden, für alle *Rahmen* $\mathcal{F} = (\mathcal{W}, \mathcal{R})$ und alle Zustände $w \in \mathcal{W}$ gilt, dass

   (a) $\mathcal{F}, w \Vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}, \eta \models_{MSO} \forall P_1, \ldots, P_n . ST_x(\varphi)$ für $\eta = [w/x]$,

   (b) $\mathcal{F} \Vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \models_{MSO} \forall P_1, \ldots, P_n . ST_x(\varphi)$.

Aufgabe 2 Sahlqvist-Formeln 3 Punkte

1. Sind die folgenden Formeln Sahlqvist-Formeln?

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \\ \psi_2 &:= \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \\ \psi_3 &:= (p \wedge \Diamond\Diamond p) \to \Diamond p \\ \psi_4 &:= (p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p) \to \Diamond p \end{aligned}$$

2. Definieren Sie für jede Sahlqvist-Formel aus der vorherigen Teilaufgabe eine prädikatenlogische Formel erster Stufe, die die entsprechende Eigenschaft von Rahmen ausdrückt.

   Hinweis: Die aussagenlogische Tautologie $((a \wedge b) \to c) \leftrightarrow ((a \to c) \vee (b \to c))$ kann hierbei hilfreich sein.

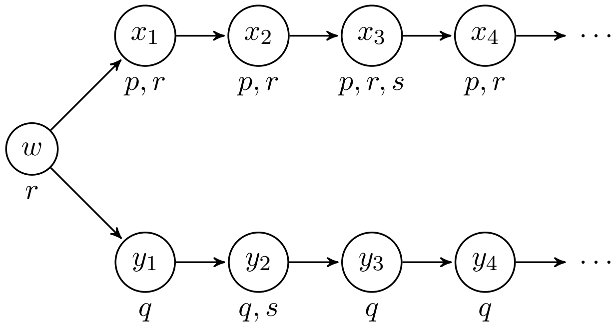
Aufgabe 3 Filtration 7 Punkte

1. Beweisen Sie Aussage 2. von Theorem 4.3 aus der Vorlesung, d.h. beweisen Sie, dass für alle endlichen Mengen von Formeln Γ, die abgeschlossen unter Teilformeln sind, alle Modelle $\mathcal{M}$, alle Formeln $\varphi \in \Gamma$ und all Zustände w in $\mathcal{M}$ gilt, dass

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^f_\Gamma, [w] \models \varphi,$$

   wobei $\mathcal{M}^f_\Gamma$ die Filtration von $\mathcal{M}$ durch Γ bezeichnet.

2. Wir betrachten das Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V})$



   das durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \{w\} \cup \{x_i \mid i > 0\} \cup \{y_i \mid i > 0\} \\
\mathcal{R} &= \{(w, x_1), (w, y_1)\} \cup \{(x_i, x_{i+1}) \mid i > 0\} \cup \{(y_i, y_{i+1}) \mid i > 0\} \\
\mathcal{V}(p) &= \{x_i \mid i > 0\} \\
\mathcal{V}(q) &= \{y_i \mid i > 0\} \\
\mathcal{V}(r) &= \{w\} \cup \{x_i \mid i > 0\} \\
\mathcal{V}(s) &= \{y_2, x_3\}
\end{aligned}$$

   definiert ist. Es sei $\Gamma = \{\Diamond p, \Box q, s\}$. Berechnen Sie $\sim_\Gamma$ und verwenden Sie diese Relation um

   (a) die kleinste Filtration von $\mathcal{M}$ durch Γ, und
   (b) die größte Filtration von $\mathcal{M}$ durch Γ

   zu definieren.

   Hinweis: Die korrekte Definition der Transitionsrelationen erfordert gewisse Sorgfalt.

3. Beweisen Sie für alle Modelle $\mathcal{M}$, die auf einem symmetrischen Rahmen basieren und für alle Mengen von Formeln Γ, dass

   (a) die größte Filtration von $\mathcal{M}$ durch Γ *nicht notwendigerweise* eine symmetrische Relation hat, aber
   (b) die kleinste Filtration von $\mathcal{M}$ durch Γ eine symmetrische Relation hat.

   Verwenden Sie sodann Eigenschaft (b) um Theorem 4.5 aus der Vorlesung (mit Beweis!) so anzupassen, dass es verwendet werden kann, um zu zeigen, dass $\mathsf{SAT}(\mathbf{B})$ und $\mathsf{VAL}(\mathbf{B})$ entscheidbar sind. Hierbei bezeichnet $\mathbf{B}$ die vom Axiom

$$\text{(B)} \qquad p \to \Box\Diamond p$$

   generierte normale Modallogik; wie wir wissen, ist $\mathbf{B}$ korrekt und vollständig für die Klasse aller symmetrischen Rahmen.

   Hinweis: Um Eigenschaft (a) zu beweisen genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.