Übungsblatt 3

Abgabe bis 31.05.2017

Rev. 16787

Aufgabe 1 (Normale) Modallogiken 3 Punkte

1. Beweisen Sie, dass für jede Familie von normalen Modallogiken $(\Lambda_j)_{j\in K}$ auch $\bigcap_{j\in K}\Lambda_j$ eine normale Modallogik (im Sinne der Definitionen 3.1 und 3.5 aus der Vorlesung) ist.
2. Wir erinnern uns, dass für eine Klasse von Rahmen S die Menge der in S gültigen Formeln durch $\Lambda_S = \{\varphi \mid \Vdash_S \varphi\}$ definiert ist. Beweisen Sie für jede Klasse von Rahmen S:
   (a) Λ_S ist eine Modallogik;
   (b) Λ_S ist eine normale Modallogik.
3. Zeigen Sie: Wenn Λ Modallogik ist und es eine Formel φ mit $\varphi \in \Lambda$ und $\neg\varphi \in \Lambda$ gibt, dann ist Λ die inkonsistente Logik (d.h. die Menge aller Modalformeln).

Aufgabe 2 Korrektheit 5 Punkte

Aus Aufgabe 1.2. wissen wir, dass – für jede Klasse von Rahmen S – die Menge Λ_S sowohl die Axiome (K), (Dual) und alle aussagenlogischen Tautologien enthält, als auch unter Modus ponens, uniformer Substitution und Generalisierung abgeschlossen ist.

1. Verwenden Sie dieses Wissen um zu beweisen, dass
   (a) **K** korrekt für die Klasse aller Rahmen ist;
   (b) **L** korrekt für die Klasse aller endlichen transitiven Bäume ist (hierbei ist **L** die durch das Axiom

   $$\text{(L)} \qquad \Box(\Box p \to p) \to \Box p \qquad \text{(Löb-Axiom)}$$

   generierte normale Modallogik).
2. Wir erinnern uns an die folgenden Axiome aus der Vorlesung

   $$\text{(T)} \qquad p \to \Diamond p \qquad \text{(Reflexivität)}$$
   $$\text{(4)} \qquad \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \qquad \text{(Transitivität)}$$
   $$\text{(B)} \qquad p \to \Box\Diamond p \qquad \text{(Symmetrie)}$$

   und daran, dass **S5** die von $\{(\mathrm{T}), (4), (\mathrm{B})\}$ generierte normale Modallogik bezeichnet. Wir betrachten nun das Axiom

   $$\text{(5)} \qquad \Diamond p \to \Box\Diamond p \qquad \text{(Euklidizität)}$$

   und bezeichnen die von $\{(\mathrm{T}), (5)\}$ genierierte normale Modallogik mit **KT5**. Zeigen Sie, dass für alle Klassen von Rahmen S gilt:

   $$\textbf{S5} \text{ ist korrekt für } S \Leftrightarrow \textbf{KT5} \text{ ist korrekt für } S$$

   Das heisst, zeigen Sie, dass für alle Klassen von Rahmen S gilt, dass

   $$\Vdash_S (\mathrm{T}), \Vdash_S (4) \text{ und } \Vdash_S (\mathrm{B}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Vdash_S (\mathrm{T}) \text{ und } \Vdash_S (5).$$

Aufgabe 3 Korrektheit von S5 2 Punkte

Es sei S5 die Klasse aller reflexiven, transitiven und symmetrischen Rahmen, d.h. die Klasse aller Rahmen $\mathcal{F} = (\mathcal{W}, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{R}$ Äquivalenzrelation. Wir erinnern uns, dass **S5** die von den Axiomen $\{(4), (\mathrm{T}), (\mathrm{B})\}$ generierte normale Modallogik bezeichnet. Beweisen Sie, dass **S5** korrekt für S5 ist, d.h. zeigen Sie $\Vdash_{\mathrm{S5}} (4)$, $\Vdash_{\mathrm{S5}} (\mathrm{T})$ und $\Vdash_{\mathrm{S5}} (\mathrm{B})$.

Hinweis: Mit den Lösungen der Aufgaben 2. und 3. ist Lemma 3.10 aus der Vorlesung bewiesen.