

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

(Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie das Problem KNOTENÜBERDECKUNG (auch „VERTEX COVER“ – VC)

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und natürliche Zahl k .

Aufgabe: Entscheiden, ob eine Knotenmenge $U \subseteq V$ mit höchstens k Knoten existiert, so dass jede Kante von G einen Endknoten in U hat.

Beweisen Sie ausführlich, dass VC in \mathcal{NP} liegt.

Aufgabe 2

(Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie die folgenden drei Entscheidungsprobleme:

- CLIQUE

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und natürliche Zahl k .

Aufgabe: Entscheiden, ob G eine Clique mit mindestens k Knoten hat. (Eine *Clique* ist ein vollständiger Untergraph, d. h. eine Knotenmenge $C \subseteq V$, so dass zwischen je zwei Knoten aus C eine Kante in G existiert.)

- UNABHÄNGIGE MENGE (UM)

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und natürliche Zahl k .

Aufgabe: Entscheiden, ob es in G eine Knotenmenge $I \subseteq V$ mit mindestens k Knoten gibt, zwischen denen keine Kante existiert.

- KNOTENÜBERDECKUNG (auch „VERTEX COVER“ – VC, siehe Aufgabe 1).

- (a) Beweisen Sie, dass diese drei Probleme wechselseitig aufeinander reduziert werden können, d. h. $\text{CLIQUE} \leq_p \text{UM} \leq_p \text{VC} \leq_p \text{CLIQUE}$.

Hinweis: Der Komplementärgraph G^c eines Graphen G hat dieselben Knoten und Kanten genau zwischen den Knoten, die in G *nicht* durch Kanten verbunden sind.

- (b) Benutzen Sie Teil (a) um aus der \mathcal{NP} -Vollständigkeit von UM auf die \mathcal{NP} -Vollständigkeit der beiden anderen Probleme zu schließen.