T.CS FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Übungsblatt 11

Abgabe: 11.07–15.07

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass die folgenden formalen Sprachen unentscheidbar sind:

(a) $L_{\text{alg}} = \{c(M) \mid M \text{ ist TM, die bei jeder Eingabe hält}\}$

(b) $L_{\varepsilon} = \{c(M) \mid M \text{ ist TM und } M \text{ akzeptiert } \varepsilon\}$

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie den folgenden Satz von Post: Wenn eine Sprache L und ihr Komplement $\overline{L}$ beide semi-entscheidbar sind, dann ist L entscheidbar.

Hinweis: Um die Aufgabe zu lösen, können Sie ohne Beweis benutzen, dass (deterministischen) Einband- und Mehrband-Turing-Maschinen äquivalent sind, d.h.: eine Sprache ist genau dann von einer deterministischen Einband-Turing-Maschine akzeptiert wird, wenn sie von einer deterministischen Mehrband-Turing-Maschinen akzeptiert wird.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe)

Für Turing-berechenbare Funktionen $f_t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $t \in \mathbb{N}$ der zugehörige Index (vgl. Vorlesung). Beweisen Sie, dass die folgende Menge nicht semi-entscheidbar ist:

$$T = \{t \mid f_t : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ist total}\}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgende Sprache

$$L = \{c(M) \mid M \text{ ist TM und } M \text{ akzeptiert } c(M) \text{ nicht}\}$$

nicht semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Probleme nicht entscheidbar sind (formalisieren Sie dazu zuerst die Probleme als formale Sprachen):

4 Punkte (a) **Eingabe:** Turing-Maschine M.
Aufgabe: entscheiden, ob M eine endliche Sprache akzeptiert.

4 Punkte (b) **Eingabe:** zwei Turing-Maschinen.
Aufgabe: entscheiden, ob die Vereinigung der von den TM akzeptierten Sprachen nicht leer ist.

Hinweis: Überlegen Sie, ob Sie bei den Teilaufgaben den Satz von Rice anwenden können.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Verwenden Sie, wie in Aufgabe 2, ohne Beweis die Äquivalenz von (deterministischen) Einband- und Mehrband-Turing-Maschinen.

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei semi-entscheidbare Sprachen und sei $\$ \notin \Sigma$. Beweisen Sie die folgende Abschlusseigenschaften.

3 Punkte (a) $L_1 \cup L_2$ ist semi-entscheidbar;

3 Punkte (b) $L_1 \cap L_2$ ist semi-entscheidbar;

3 Punkte (c) $L_1 \$ L_2 = \{w\$u \in \Sigma^* \mid w \in L_1, u \in L_2\}$ ist semi-entscheidbar.