Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Theoretische Informatik für Wirtschaftsinformatik und Lehramt

Übungsblatt 10

Abgabe: 04.07–08.07

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass die Funktionen $x * y, x^y, x \dot{-} y$ und $|x - y|$ LOOP-berechenbar sind indem Sie diese Funktionen als LOOP-Programme implementieren. Dabei ist es anzunehmen, dass $0^0 = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie das *LW-Simulator* Tool von `https://cal8.cs.fau.de/redmine/projects/lw-simulator/repository/revisions/master/show/LWSimulatorCons/bin/Release` um Ihre Lösungen zum Laufen zu bringen.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Implementieren Sie den *Euklidischen Algorithmus*, der den größten gemeinsamen Teiler von zwei natürlichen Zahlen berechnet als ein WHILE-Program:

$$gcd(n,m) = \begin{cases} 0, & n = 0 \ \textbf{oder} \ m = 0 \\ n, & n = m \\ gcd(n-m,m) & n > m \\ gcd(n,m-n) & m > n \end{cases}$$

Hinweis: Die Funktion *gcd* ist sogar LOOP-berechenbar; wie müsste ein LOOP-Programm für *gcd* aussehen?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die *Cantorsche Paarungsfunktion* $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine invertierbare Kodierung von Paaren von natürlichen Zahlen als einzelne natürlichen Zahlen:

$$\pi(x,y) = y + \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)$$

Die Umkehrfunktion $(\pi_1, \pi_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist wie folgt:

$$\pi_2(z) = z - \frac{q(z)(q(z)+1)}{2},$$
$$\pi_1(z) = q(z) - \pi_2(z)$$

wobei $q(z) = \max\{v \mid v * (v+1)/2 \leq z\}$.

Implementieren Sie $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als LOOP-Programme.

Hinweis: Implementieren Sie zunächst $f(n) = n * (n+1)/2$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Implementieren Sie die Fibbonacci-Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die wie folgt definiert ist

$$F(0) = 1 \qquad f(1) = 1 \qquad F(n+2) = F(n+1) + F(n),$$

als ein LOOP-Programm.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Implementieren Sie die folgende rekursive Definition der *McCarthy's 91-Funktion* als ein WHILE-Programm:

$$M(n) = \begin{cases} n - 10, & n > 100 \\ M(M(n+11)), & n \leq 100 \end{cases}$$

Achtung: Gefragt ist die Implementierung der obigen rekursiven Schleife. Es ist eine bekannte Tatsache, dass $M(n) = n - 10$ wenn $n > 100$ und $M(n) = 91$ in sonstigen Fällen. Das darf man allerdings bei der Lösung nicht benutzen, obwohl es einen Weg aufzeigt, M sogar als LOOP-Programm in offensichtlicher Weise zu implementieren.

Hinweis: Beachten Sie, dass

$$M^k(n) = \begin{cases} n, & n > 100, k = 0 \\ M^{k-1}(n-10), & n > 100, k > 0 \\ M^{k+1}(n+11), & n \leq 100 \end{cases}$$

wobei $M^k(n) = M(\ldots(M(n))\ldots)$ und M, k mal wiederholt ist, insbesondere $M^0(n) = n$.