Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Theoretische Informatik für Wirtschaftsinformatik und Lehramt

Übungsblatt 9

Abgabe: 27.06–01.07

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ überabzählbar ist.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Wie in der Vorlesungsfolie 59 bemerkt wurde, wird jede kontextfreie Sprache von einer Turing-Maschine akzeptiert. Ohne Einschränkung betrachten wir Grammatiken in Chomsky-Normalform. Sei $G = (\Delta, \Sigma, P, S)$ eine solch Grammatik. Dann kann man die folgende Strategie verwenden um eine *nichtdeterministische* Turing-Maschine zu konstruieren, die $L(G)$ akzeptiert.

1. Als Bandalphabet nehmen wir $\Delta \cup \Sigma$ und definieren die Überführungsfunktion so, dass im Laufe der Rechnung das Band stets ein Wort der Form

$$w_1 E_1 w_2 E_2 \cdots w_n E_n w \tag{$*$}$$

enthält, wobei $w_i, w \in \Sigma^*$ und $E_i \in \Delta$ (beginnend bei $n = 0$). Die Idee dabei ist, dass das Wort w_i von G mit E_i als Startvariable erzeugt ist.

2. Der Kopf der Maschine zeigt immer entweder auf E_n in $(*)$, oder rechts von E_n und der aktuelle Zustand der Maschine speichert immer das gerade aktuelle Nichtterminal aus Δ, am Anfang ist es S.

3. Wenn das aktuelle Nichtterminal X ist und die Grammatik eine Regel der Form $X \to YZ$ enthält, dann versucht die Maschine
   - w aus $(*)$ *nichtdeterministisch* als $w = uv$ aufzuspalten;
   - w in $(*)$ durch uYv zu ersetzen;
   - Z als aktuelles Nichtterminal im Zustand zu speichern.

4. Wenn das aktuelle Nichtterminal X ist und die Grammatik eine Regel der Form $X \to a$ mit $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ enthält, dann überprüft die Maschine, ob $w = a$, löscht w ggf. und macht E_n, wenn vorhanden, zum aktuellen Nichtterminal.

5. Die Schritte (3) und (4) werden so lange wie möglich wiederholt, und die Maschine terminiert und akzeptiert genau dann, wenn alle Symbole auf dem Band gelöscht wurden.

(a) Geben Sie eine nichtdeterministische Turing-Maschine an, die durch die folgende kontextfreie Grammatik definierte Sprache akzeptiert: $G = (\{ S, X, Y \}, \{ a, b \}, P, S)$ wobei

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to SX \mid YS \mid \varepsilon \\ & X \to XX \mid a \\ & Y \to b \end{aligned}$$

(b) Illustrieren Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine anhand des Wortes *baa*.

Letzte Änderung: 18. Juni 2016

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Sprachen L über $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ mit der Eigenschaft, dass wenn $w \in L$ dann $w^R \notin L$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{L}$ überabzählbar ist.

Hinweis: Versuchen Sie, wie in Aufgabe 1, einen Widerspruch aus der Annahme, dass $\mathcal{L}$ abzählbar ist, d.h. $\mathcal{L} = \{L_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ abzuleiten. Beobachten Sie, dass die Elemente von jeder Sprache L_i als natürliche Zahlen gesehen werden können (wobei natürlich, z.B. $0010 = 010 = 10$) und betrachten Sie die Menge

$$\{1w0 \in \{1, \ldots, 9\}^* \mid 1w0 \notin L_w\}.$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Lassen wir uns erneut die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{[,]\}, P, S)$ mit

$$P: \qquad S \to \varepsilon \mid [S] \mid SS$$

betrachten, die die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke erzeugt.

3 Punkte (a) Wenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung an, um G in in Chomsky-Normalform G' zu bringen.

7 Punkte (b) Konstruieren Sie aus G' eine **nichdeterministische** Turing-Maschine die genau die Menge aller korrekt geklammerten Ausdrücken akzeptiert.

5 Punkte (c) Illustrieren Sie die erfolgreiche Arbeitsweise Ihrer Maschine anhand des Wortes $[\,]\,[\,]$.