Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Übungsblatt 2

Abgabe: 02.05–06.05

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie die Aussagen (d) und (f) von Satz 1.1:

(d) $|vw| = |v| + |w|$,

(f) $(vw)^R = w^R v^R$.

(Die Aussagen (a), (b) und (c) des Satzes dürfen dabei verwendet werden.)

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie die Aussagen (d), (f) und (g) von Satz 1.2, nämlich dass für beliebige formale Sprachen $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ gilt:

(d) $(L^*)^* = L^*$,

(f) $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$,

(g) $(L^*)^R = (L^R)^*$.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe)

Formulieren Sie die folgenden Probleme als formale Sprachen über einem geeigneten Alphabet:

(a) **Eingabe:** eine natürliche Zahl n
Aufgabe: Testen, ob n eine 2er-Potenz ist.

(b) **Eingabe:** ein Wort über dem deutschen Alphabet ohne Großbuchstaben und Umlaute
Aufgabe: Testen, ob w ein Palindrom ist.

(c) **Eingabe:** ein Wort, das nur aus den Buchstaben a und z besteht.
Aufgabe: Testen, ob das Wort mit aza beginnt und mit z endet.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

Betrachten Sie die folgende Grammatik G aus der Vorlesung:

$$S \to aSBC \qquad aB \to ab$$
$$S \to aBC \qquad bB \to bb$$
$$CB \to BC \qquad bC \to bc$$
$$cC \to cc$$

Wie in der Vorlesung erwähnt, erzeugt diese Grammatik die Sprache $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. Die schwächere Aussage, dass für jedes $n \geq 1$ das Wort $a^n b^n c^n$ von G erzeugt wird, lässt sich nach dem folgenden Plan beweisen:

(a) induktiv über $n \geq 1$ beweisen, dass $C^n B \Rightarrow^* BC^n$;

(b) induktiv über $n \geq 1$ und mithilfe von (a) beweisen, dass $S \Rightarrow^* a^n B^n C^n$;

(c) induktiv über $n \geq 1$ beweisen, dass $aB^n \Rightarrow^* ab^n$;

(d) induktiv über $n \geq 1$ beweisen, dass $bC^n \Rightarrow^* bc^n$.

Die gesamte Ableitung für $a^n b^n c^n$ kann man dann wie folgt konstruieren:

$$S \xRightarrow{(b)}{}^* a^n B^n C^n \xRightarrow{(c)}{}^* a^n b^n C^n \xRightarrow{(d)}{}^* a^n b^n c^n.$$

Führen Sie die obigen induktiven Beweise (a)–(d) durch.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $a \in \Sigma$, $b \in \Sigma$. Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort mit der Eigenschaft, dass auf jedes (bis auf das letzte) Vorkommen von a in w direkt ein Vorkommen von b folgt, z.B. $w = bbababbaba$.

5 Punkte (a) Beweisen Sie durch Indukion über w, dass $|w|_b \geq |w|_a - 1$.

3 Punkte (b) Angenommen, dass $\Sigma = \{a, b, c\}$, geben Sie eine Grammatik an, die alle solchen Wörter w erzeugt.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Beweisen Sie die Aussagen c) und e) von Satz 1.2, d.h. für beliebige $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ gilt:

3 Punkte (a) $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$.

3 Punkte (b) $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Die Sprache P aller *Palindrome über* Σ ist induktiv definiert wie folgt:

- $\varepsilon \in P$, $a \in P$ und $b \in P$;
- falls $w \in P$, so ist $awa \in P$ und $bwb \in P$.

2 Punkte (a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine Grammatik G an, die P erzeugt.

4 Punkte (b) Beweisen Sie, dass für jedes $w \in \Sigma^*$ gilt: wenn $w^R = w$, dann wird w von G erzeugt (Induktion über w).

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Auf Vorlesungsfolie 18 des zweiten Kapitels (Reguläre Sprachen) finden Sie ein Beispiel einer Ableitung. Verwenden Sie dies als Muster, um eine geeignete Ableitung des Satzes

„die kleine bissige Katze jagt der grosse bissige Hund“

aus der Grammatik auf den Vorlesungsfolien 10–11 anzugeben.