Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Übungsblatt 1

Abgabe: 25.04–29.04

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Finden Sie jeweils eine binäre Relation R auf der Menge $\{a, b, c\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) reflexiv, symmetrisch und transitiv,

(b) reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch,

(c) reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv,

(d) symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

Die Menge $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei induktiv wie folgt definiert:

1. $(0, 0) \in M$,
2. falls $(n, m) \in M$, so $(n + 1, (n + 1)^3 + m) \in M$.

Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch: $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i$.

Beweisen Sie: $M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = (f(x))^2\}$.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe)

Die Fibonacci-Folge F_0, F_1, F_2, … ist durch das folgende rekursive Bildungsgesetz definiert:

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (\text{für } n \geq 1)$$

Beweisen sie durch Induktion über n die *Moivre-Binet-Formel*:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)

(a) Geben Sie analog zur Definition der Menge der Binärbäume aus der Vorlesung eine induktive Definition der Menge $\mathcal{B}$ der Bäume, bei denen jeder innere Knoten einen oder zwei Kinder hat und Blätter (= Knoten ohne Kinder) mit Elementen der Menge L markiert sind.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mittel struktureller Induktion, dass in jedem Baum aus $\mathcal{B}$ mit mindestens 2^k Knoten ein Pfad der Länge $\geq k$ existiert.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Betrachten Sie die binäre Relation R auf den positiven natürlichen Zahlen definiert durch

$$nRm \iff n \cdot m \text{ ist gerade.}$$

(a), (b) und (c) – 2 Punkte jeweils

Beweisen oder widerlegen Sie, dass R (a) reflexiv, (b) symmetrisch, (c) transitiv ist.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

3 Punkte

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq 1$, dass für jede natürliche $m \geq 1$,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots \frac{1}{m+n} > \frac{1}{m/n+1}$$

3 Punkte

(b) Verwenden Sie Teilaufgabe (a) mit $n = m$, um durch vollständige Induktion zu beweisen, dass es für jedes $n \geq 1$ ein k existiert, so dass

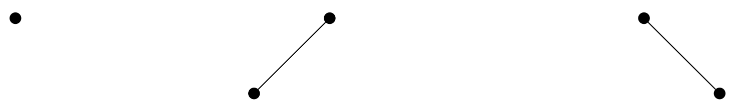
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$$

(Somit wird eine mathematisch wertvolle Tatsache bewiesen, nämlich dass die *Harmonische Reihe* $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ divergiert.)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Betrachten Sie die induktiven Definitionen der Menge der Binärbäume bzw. der Funktion h, die die Höhe eines Baumes berechnet, **aus der Vorlesung** (ohne Bezug auf Aufgabe 4!).

Ein solcher binärer Baum t ist *balanciert*, wenn entweder t eine der folgenden Formen hat



oder t einen linken Unterbaum l und einen rechten Unterbaum r hat, so dass (a) l balanciert ist, (b) r balanciert ist, und (c)

$$|h(l) - h(r)| \leq 1$$

gilt.

2 Punkte

(a) Geben Sie jeweils Beispiele eines balancierten und eines nicht balancierten Baums mit genau 7 Knoten.

3 Punkte

(b) Beweisen Sie mittels Strukturinduktion, dass in einem balancierten Binärbaum t die Anzahl der Blätter **höchstens** $2^{h(t)}$ beträgt.

4 Punkte

(c) Beweisen Sie mittels Strukturinduktion, dass in einem balancierten Binärbaum t die Anzahl der Blätter **mindestens** $F_{h(t)+1}$ beträgt, wobei F_n die n-te Fibonacci Zahl ist (sieh Aufgabe 3).

Hinweis: Bei Teilaufgabe (c) müssen Sie sich im Laufe der Induktion im Schritt n auf die zwei vorherigen Schritte beziehen ($n-1$ und $n-2$) statt nur einen. D.h. der Basisfall der Induktion besteht auch aus zwei Fällen $h(t) = 0$ und $h(t) = 1$ beträgt (warum?).